

**MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
 ET
 THÉORIE FRACTAL . UN NOUVEAU
 CONCEPT POUR LA
 CARACTÉRISATION DES OBJETS
 FRACTALS.**

PREMIER RAPPORT

Études réalisés au CIDETEQ S.C.

**Centro de Investigación y Desarrollo
 Tecnológico en Electroquímica del
 Estado de Querétaro. Depto.
 Electrónica y Control.**

Auteur :Ivan Ramon Terol Villalobos.

Novembre 1993- Janvier 1994.

Lorsqu'on veut appliquer la Géométrie et le Calcul à des objets trop compliqués, à des objets dont nous ne connaissons pas les propriétés pour pouvoir les mesurer, on est obligé dans tous ces cas de faire des suppositions toujours contraires à la Nature, de dépouiller le sujet de la plupart de ses qualités, d'en faire un être abstrait qui ne ressemble plus à l'être réel, et lorsqu'on a beaucoup raisonné et calculé sur les rapports et les propriétés de cet être abstrait, et qu'on est arrivé à une conclusion tout aussi abstrait, on croit avoir trouvé quelque chose de réel et on transport ce résultat idéal dans le sujet réel, ce qui produit une infinité de fausses conséquences et d'erreurs.

Pour une Ethique de la
Connaissance Scientifique.
Jaques Monod.

Buffon, Hist. Nat., Discours
d'Intr. 1757.

I.- Résumé

La Morphologie Mathématique et la Théorie Fractal sont deux méthodologies pour la caractérisation et représentation du monde physique. La première, basée sur les principes d'Inclusion et d'Idempotence des transformations, a été utilisée pour décrire un nombre important de phénomènes en Sciences de Matériaux, Biologie, Teledetection,... à partir des images du phénomène. Cette théorie très générale, est adaptée à chaque problème d'étude. Aussi bien dans le cas de transformations morphologiques que dans le cas de modèles, un ordre et un choix de ces transformations, ainsi que les lois de construction des modèles sont bien définies pour aboutir à une bonne modélisation. La deuxième méthodologie, concept géométrique développé par B. Mandelbrot que de manière mathématique caractérise des structures aléatoires, considère une récurrence des formes qui se répètent, de façon plus fine à échelles aussi plus fines. Ce qui rend si puissant ce concept est la dimension fractal, permettant de modéliser différents phénomènes physiques par un seul paramètre. Dans ce travail nous nous proposons de lier d'une manière très simple ces deux notions où plutôt méthodologies.

II.- Introduction.

Notre travail concerne deux concepts qui ont été mis dans le domaine de l'Analyse d'Images, mais qu'ils appartiennent plutôt au monde de la physique. D'une part, la notion de la dimension fractal (Objet fractal, être mathématique et physique, Géométrie fractal), développée par B. Mandelbrot. D'autre part, la Morphologie Mathématique développée par G. Matheron et J. Serra avec tout un ensemble de chercheurs de l'Ecole de Fontainebleau [1],[2].

Le succès remarquable de ces méthodologies est dû bien évidemment à leur efficacité pour la

description des objets réels. Pour la première notion, son élégance révèle sur des objets très complexes, une structure d'une simplicité rare (un seul paramètre) [3][4].

Pour la deuxième notion, basée sur les principes a) Inclusion, b) Idempotence, pour la conception de transformations morphologiques, permet de caractériser différents phénomènes physiques. Deux concepts sont fondamentaux 1) Transformer pour comprendre et modéliser, 2) Mesurer pour évaluer.

Le premier principe (inclusion) pour la modélisation du monde visuel, suit le même but que le principe d'additivité dans le monde sonore. Les transformations qui remplissent ce principe sont appelées Transformations Croissantes et commutent avec l'union. Le deuxième principe implique un processus d'irréversibilité. La reconnaissance d'un objet signifie simplement que tous les autres composants ont été éliminés de la scène. Néanmoins, d'un point de vue pratique, ce principe permet de mieux choisir (ou proposer nos transformations) et au même temps fournit d'une structure de semigroupe (plutôt de monoides) aux transformations.

II.1.- Concepts de dimension liés à la forme. (Géométrie Fractal).

DIMENSION D'HOMOTHÉTIE.

La famille de courbes de Von Koch (figure II.1) est une illustration idéale de la propriété d'homothétie interne des objets fractals dont la définition est la suivante:

(obtenues par un ensemble de transformations morphologiques) et de la ligne de partage d'eaux L.P.E [5]. D'autres, s'appliquent sans aucune segmentation d'images (ou au plus une segmentation partielle). Cette deuxième approche devient très intéressante spécialement sur des images très complexes où la technique de segmentation risquerait de donner des résultats aberrants. Dans cette méthode d'Analyse d'Images, des transformations sont appliquées sur les images, puis des mesures sont réalisées pour estimer des paramètres tels que la moyenne, covariance, variogramme, granulométrie, ... Dans ce cas, la M.M. fournit aussi une famille de modèles caractérisant plusieurs types de situations où les objets sont interprétés comme des réalisations d'ensembles aléatoires[6],[7].

Nous n'allons pas donner ici une revue de la M.M. puisqu'il existe un ensemble d'ouvrages en français, anglais, et pourquoi pas en espagnol. Néanmoins, certains concepts, définitions et quelques théorèmes importantes pour la compréhension de ce travail seront décrits plus ou moins de manière exhaustive.

II.3.- Plan de Travail.

Dans les prochains chapitres nous allons donner initialement quelques définitions importantes de la morphologie mathématique. Puis nous introduirons d'autres concepts adaptés à notre problème particulier. Ensuite nous caractériserons un objet fractal par notre méthode. Nous allons finir ce travail par une série de conséquences réelles (applications) et par un ensemble de questions à répondre dans l'avenir.

III.-Morphologie Mathématique dans le cadre Booleen.

Nous nous proposons de travailler dans cet étude dans le cadre binaire des treillis booléens du type $\wp(E)$ ensemble des parties de l'ensemble E. De cette manière pour tout élément X de $\wp(E)$ existe X^c (unique puisque le treillis est distributif) tel que $X \cap X^c = \emptyset$. Dans les treillis booléens la complémentation $X \rightarrow X^c$ induit une dualité qui produit une correspondance entre les transformations $\Psi: \wp \rightarrow \wp$ et son dual Ψ^* exprimée par $\Psi^*(X) = [\Psi(X^c)]^c$.

D'après un résultat algébrique classique .

$$E \in \wp(E), \emptyset \in \wp(E)$$

On sera tout à fait intéressé à la transformation croissantes $\Psi: \wp \rightarrow \wp$ telles que pour tout X et Y de $\wp(E), X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y)$ et qui commutent avec l'union (intersection) qu'on appellera Dilatation (resp. Erosion) exprimées par:

$$\delta(\cup_i X_i) = \cup_i \delta(X_i)$$

Dilatation.

$$\varepsilon(\cap_i X_i) = \cap_i \varepsilon(X_i)$$

Erosion.

$$X_i \in \wp(E), \delta(E) = E, \delta(\emptyset) = \emptyset.$$

Proposition 1. A chaque application $\delta: \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ correspond une unique érosion donnée par:

$$\varepsilon(X) = \cup \{B \in \wp(E), \delta(B) \subseteq X\}$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \log S(\varepsilon) / \log(\varepsilon)) \quad (II.3)$$

La longueur de la courbe "C" est donnée par

$$L(\varepsilon) = \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

D'après II.3) $L(\varepsilon) = K\varepsilon^{1-D}$

On remarque qu'il est possible d'utiliser des dilatations pour estimer "D". La méthode de recouvrement selon Minkowski revient en termes de M.M. à opérer une dilatation de taille ε de l'ensemble "C". On obtient une surface $S(\varepsilon)$ d'aire $R(\varepsilon)$ appelée saucisse de Minkowski.

Nous verrons plus tard cette estimation lors de la présentation de notre concept de caractérisation.

LIENS ENTRE DIMENSION D'HOMOTHÉTIE, DIMENSION DE RECOUVREMENT ET DIMENSION TOPOLOGIQUE.

On sait qu'une courbe de Von Koch peut être recouverte de $N(\varepsilon_i)$ disques de diamètre $\varepsilon_i = 1/r^i$ et que le concept de Hausdorff-Besicovitch coïncide avec celui de la dimension d'homothétie (eq. (II.1)). On peut montrer aussi [Kahane-Salem 63] la coïncidence entre la dimension de Minkowski et la dimension d'homothétie pour les courbes fractales à homothétie interne. Une courbe (ou surface) régulière a une dimension (topologique) $D_t = 1$ (ou $D_t = 2$). Un objet fractal possède une dimension d'homothétie interne ou de recouvrement non entière appelée dimension fractal. On a alors $D > 1$ pour une courbe fractale ($D > 2$ pour une surface). Les notions précédentes peuvent cependant

s'appliquer à des objets réguliers, elles coïncident avec la dimension topologique, par exemple:

On remplace chaque segment par lui-même

$$\rightarrow (1/r) = 1/N \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} = 1$$

Les objets fractals décrits au travers des définitions (II.1),(II.2),(II.3), ont les propriétés suivantes:

- (a)- Ils sont extrêmement irréguliers, et ceci à toute échelle.
- (b) Ils sont auto-similaires; quelle que soit l'échelle adoptée, ils présentent géométriquement ou statistiquement le même aspect.

Dans notre apport, nous reprendrons cette partie sur trois axes différents (1) la notion de dimension fractal ici exprimée ne sera prise en compte que de manière comparative, (2) Nous proposons différentes manières de caractériser un objet fractal, (3) Une étude purement topologique n'est pas envisagée, néanmoins nous donnons quelques commentaires. Nous verrons, que les phrases écrites tout au début de ce travail ont une signification très réelle.

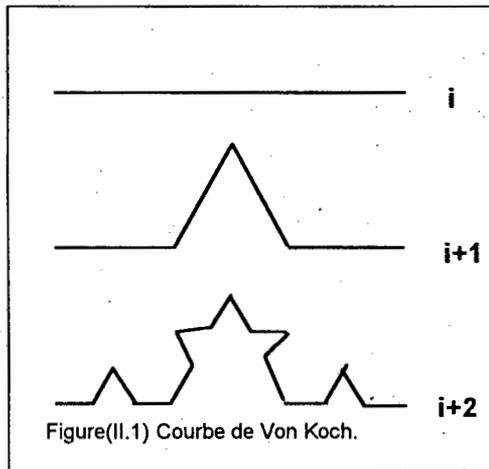
II.2.- La Morphologie Mathématique M.M.

En M.M. ils existent différentes approches pour la caractérisation de structures. Parmi celles-ci, certains font appel à la segmentation d'images basée sur les notions des marqueurs

Une partie quelconque d'un objet fractal apparait comme une réduction homothétique de son ensemble.

On constate qu'à une étape "i" de sa réalisation les rapports des logarithmes du nombre de ses segments et celui de leur taille est indépendante de l'étape "i" que l'on considère:

$$\frac{\text{LOG}(N^i)}{\text{LOG}(\frac{1}{r})^i} = -\frac{\text{LOG}(N)}{\text{LOG}(r)} = -D \quad (II.1)$$



*Autosimilarité: Quelque soit l'échelle à la quelle on se place, la courbe de Von Koch présente le même aspect.

DIMENSION DE RECOUVREMENT.

Une courbe fractale naturelle présente également une autosimilarité; son degré d'irregularité est comparable à tout échelle. L'homothétie interne est ici une propriété de nature statistique de l'objet. Pour définir une dimension fractale sur de telles courbes on utilisera un ensemble régulière recouvrant

celles-ci. Les deux notions suivantes adoptent ce principe:

-Dimension selon Hausdorff Besicovitch.

On considère tous les recouvrements de la courbe "C" par des réunions connexes de disques de diamètre ϵ , centrés sur "C". Soit parmi les recouvrements celui qui contienne le minimum $N(\epsilon)$ de disques. La dimension de recouvrement est donnée par la relation suivante:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{LOG}(N(\epsilon))}{\text{LOG}(\epsilon)} \quad (II.2)$$

Remarquons que la longueur $L(\epsilon)$ de la courbe fractal "C" mesurée à l'aide d'un compas d'ouverture epsilon (selon (II.2)) est:

$$L(\epsilon) = K\epsilon^{1-D}$$

-Dimension de Minkowski.

On prend en compte chaque point de la courbe "C" sur laquelle on centre un disque de diamètre ϵ . La réunion de ces disques forme ainsi un Ruban $R(\epsilon)$ de longueur ϵ qui est l'ensemble de points dont la distance à "C" est au plus égal à ϵ . Soit $S(\epsilon)$ l'aire du Ruban $R(\epsilon)$.

On définit la dimension de Minkowski selon:

Egalement à chaque érosion correspond une unique dilatation. Cette dualité au sens de deux treillis complets isomorphes (la classe de dilatation et la classe d'érosions) peut être exprimée par:

$$\delta(X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq \varepsilon(Y)$$

On pourrait être plus générale en utilisant le SUP pour l'union et le INF pour l'intersection et entrer dans le cas de treillis de fonctions. Néanmoins, dans cette première approche (relation MM et Fractals) nous resterons dans le cadre binaire.

TRANSFORMATIONS ET FILTRES MORPHOLOGIQUES DE BASE

Dans le cas Euclidien, nous définissons les transformations de base, Dilatation et Erosion données respectivement par:

$$\delta_B(X) = X \oplus \overset{\vee}{B} = \cup \{X_b : b \in B\} \quad (III.1)$$

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus \overset{\vee}{B} = \cap \{X_b : b \in B\}$$

où $\overset{\vee}{B}$ est le transposé de B.

La Dilatation et l'Erosion sont des transformations croissantes. La Dilatation (resp. L'Erosion) est extensive (resp. anti-extensive). Néanmoins, ni la Dilatation, ni l'Erosion sont des transformations idempotentes. A partir de ces deux transformations il est possible de définir tout un ensemble de transformations (filtres), qui remplissent le principe d'idempotence. On va décrire seulement les deux filtres de base: la Fermeture et l'Ouverture Morphologique:

$$\text{Fermeture } \phi_B(X) = \varepsilon_B \overset{\vee}{\delta}_B(X) \quad (III.2)$$

$$\text{Ouverture } \gamma_B(X) = \delta_B \overset{\vee}{\varepsilon}_B(X)$$

La Fermeture (resp. Ouverture) est une transformation croissante (resp. croissante), extensive (resp. anti-extensive) et Idempotente (resp. idempotente).

-GRANULOMETRIE PAR DES OUVERTURES.

Le terme de Granulométrie est utilisé pour la description de la distribution de taille des particules. En M.M., nous tamisons des ensembles et des fonctions de la même manière qu'on le fait physiquement à partir d'un tamis. La description axiomatique de G. Matheron permet de donner les règles pour une définition correcte d'une Granulométrie.

Soit Ψ_λ une famille de transformations dépendant d'un paramètre λ (positif) qui vérifie

i) Croissance $X \subset Y \Rightarrow \Psi_\lambda(X) \subset \Psi_\lambda(Y)$

ii) Anti-extensivité $\Psi_\lambda(X) \subset X$

iii) Indépendance de l'ordre des transformations:

$$\Psi_\lambda(\Psi_\mu(X)) = \Psi_\mu(\Psi_\lambda(X)) = \Psi_{SUP(\lambda,\mu)}(X)$$

ce dernier axiome implique l'idempotence. L'ouverture morphologique $\gamma_{\lambda B}$ avec B compact convexe (λ facteur d'homothétie) remplit ces axiomes (Egalement la fermeture pour définir une Anti-Granulométrie).

On peut associer à la granulométrie par des ouvertures deux fonctions, appelées fonction de distribution granulométrique $F(\lambda, X)$ et la

fonction de densité granulométrique $g(\lambda, X)$, exprimées par:

$$F(\lambda, X) = \frac{\mu(X) - \mu(\gamma_\lambda(X))}{\mu(X)} \quad (III.3)$$

$$g(\lambda, X) = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda, X)$$

où μ est la mesure de Lebesgue.

-ELEMENTS EXTREMES MORPHOLOGIQUES.

Lorsqu'on décrit un élément $X \in \wp$ par intermédiaire d'une étude de son évolution lors de l'application d'une famille de transformations du type Erosion ou Ouverture [2], il est intéressante d'observer la dernière étape de l'évolution.

a) Erodé Ultime. On suppose une famille ε_λ décroissante de paramètre λ positif, avec $\varepsilon_0 = I$ (I étant l'identité). Considérons la classe d'éléments $\wp(\lambda_{\max})$ en faisant varier λ entre $[0, \lambda_{\max}]$ et telle que $\varepsilon_{\lambda_{\max}} = \emptyset$. Nous appelons Erodé Ultime de X l'ensemble:

$$U_\varepsilon(X) = \varepsilon_\mu(X) : \mu = \sup\{\lambda : \varepsilon_\lambda(X) \neq \emptyset\}$$

avec $X \in \wp(\lambda_{\max})$

b) Eléments Critiques d'une Granulométrie. On va associer à chaque Granulométrie ses éléments critiques. Soit l'ensemble X . On dira qu'il est critique pour $\lambda = \lambda_n$ quand:

$$\lambda < \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset; \lambda > \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(X) = \emptyset$$

$$\text{et } \lambda_n = \sup\{\lambda : \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset\}.$$

Lorsque $\lambda \uparrow \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda \downarrow \gamma_{\lambda_n}$ et nous avons

$$\gamma_{\lambda_n}(X) = \bigwedge\{\gamma_\lambda(X) : \lambda < \lambda_n\} = M_n$$

et par idempotence de l'ouverture $\gamma_{\lambda_n}(M_n) = M_n$. Puisque nous savons que les invariants (ensembles qui restent invariants après transformation) $B_{\lambda_n} \subset B_\lambda$ pour tout

$\lambda \leq \lambda_n$ M_n est invariant pour tout ouverture plus petite que λ_n :

$$\lambda \leq \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(M_n) = M_n$$

$$\lambda > \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(M_n) = \emptyset$$

Au contraire, tout $M_n \in \wp$ tel que l'ouverture

$\gamma_{\lambda_{\max}}(M_n) = \emptyset$ correspond à $\lambda_n \in [0, \lambda_{\max}]$ tel que M_n est critique pour λ_n .

SQUELETTE PAR OUVERTURES.

Definition 1. Le squelette d'un ensemble X est le lieu de centres des boules $B(x, r)$ maximales de X :

$$S(X) = \cup\{x \in X, \exists B(x, r) \subset X\}$$

et d'après un théorème de C. Lantuejoul

$$S(X) = \bigcup_{\rho > 0} \bigcap_{\rho > 0} [(X \ominus \rho \overset{\circ}{B}) / \gamma_{\mu \overset{\circ}{B}}(X \ominus \rho \overset{\circ}{B})] \quad (III.4)$$

où $\rho \overset{\circ}{B}$ est une boule ouverte de rayon ρ .

A tout point du squelette $S(X)$ on peut associer le rayon de la boule maximale correspondante. On définit ainsi une fonction q_x sur $S(X)$, à

valeurs dans R^+ qui est appelée fonction d'étanchéité (quench function) ou fonction d'extinction

$$q_x = \begin{cases} S(x) \rightarrow R^+ \\ x \rightarrow r, B(x, r); \text{maximale} \end{cases}$$

(III.5)

On peut montrer que le squelette de X peut s'écrire comme l'union des résidus des ouverts successifs de X .

GRANULOMETRIE DES ELEMENTS CRITIQUES DES RESIDUS.

On va introduire dans ce partie un nouveau concept sur la granulométrie. On peut mieux le voir en utilisant le concept de résidu d'un opérateur agissant sur X (ensemble ou fonction). Soit X l'ensemble initiale et $r_\Psi(X) = X - \Psi(X)$ le résidu de X après application de Ψ (voir les axiomes pour définir une granulométrie). Nous calculons la suite suivante de transformations:

Soit λ_n l'élément critique de X , alors

$$\zeta_{\lambda_{n+1}} = r_{\lambda_{n+1}}(X) = X - \gamma_{\lambda_{n+1}}(X) = X$$

$$\zeta_{\lambda_n} = r_{\lambda_n}(X) = X - \gamma_{\lambda_n}(X)$$

$$\zeta_{\lambda_{n-1}} = r_{\lambda_{n-1}}r_{\lambda_n}(X) = \zeta_{\lambda_n} - \gamma_{\lambda_{n-1}}(\zeta_{\lambda_n})$$

$$\zeta_{\lambda_1} = r_{\lambda_1}r_{\lambda_2} \dots r_{\lambda_{n-1}}r_{\lambda_n}(X) = r_{\lambda_1}(\zeta_{\lambda_2})$$

avec $\zeta_{\lambda_1} = \emptyset$ (III.6)

Nous observons que les λ_i sont les éléments critiques des résidus et exprimés par:

$$\lambda_i = \sup\{\lambda : \gamma(\zeta_{i+1}) \neq \emptyset\} \text{ et}$$

$$i \in I; (\text{denombrable})$$

On va définir deux nouvelles fonctions, semblables à celles qu'on a défini dans le cas de la granulométrie par des ouvertures. On va les appeler fonctions de distribution $Fecr(\lambda_i, X)$ et de densité $Gecr(\lambda_i, X)$ des éléments critiques des résidus.

$$Fc(\lambda_k, X) = \frac{\mu(X) - \sum_{i=k}^n \mu(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i+1}}))}{\mu(X)}$$

Qu'est-ce qui se passe entre les éléments critiques des résidus λ_k et λ_{k+1} . Puisque $\gamma_{\lambda}(\zeta_{k+1}) = \emptyset$ avec λ dans $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ nous définirons $Fecr(\lambda_i, X)$ par:

$$Fecr(\lambda, X) = Fc(\lambda_k, X) \text{ pour tout } \lambda \text{ dans } [\lambda_k, \lambda_{k+1}).$$

Puis de manière plus naturelle, $Gecr(\lambda, X)$ est donnée par:

$$Gecr(\lambda, X) = \frac{d}{d\lambda} Fecr(\lambda, X)$$

IV.- FRACTALS ET M.M.

Problème de Percolation.

IV.1.- LE PROBLEME DE PERCOLATION.

Afin de motiver notre approche, nous allons introduire un problème réel et d'essayer de le lier à notre approche.

Le problème de Percolation est décrit de la manière suivante[8]:

Dans Chaque union (BOND) entre structures d'un treillis nous associons un nombre de remplissage de valeur "1" avec une probabilité "p" et la valeur "0" s'il n'existe pas (the bond is missing).

La notion clé dans la théorie de Percolation est l'existence d'un seuil de percolation nommé valeur critique " p_c " de la probabilité de remplissage. Quand $p < p_c$, il n'y a que des agglomérats (clusters) finits. Lorsque $p > p_c$, il existe un agglomérat infini, donc l'existence du phénomène de percolation. Le seuil p_c est analogue à une température critique. Afin de décrire le comportement d'échelle dans une région critique on introduit la notion

$$\Delta p = p - p_c \quad (IV.1)$$

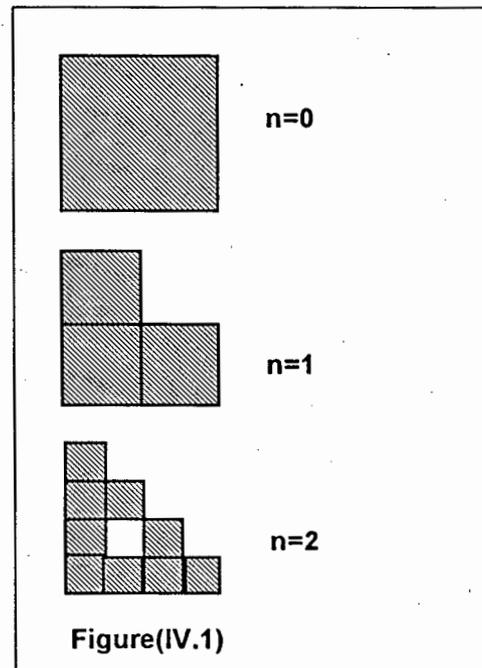
Kirkpatrick (1978,1979) a fait la supposition que le point clé du problème de percolation à deux dimensions pourrait être l'existence d'une structure fractal pour la modélisation de ce problème.

Dans [8], on décrit d'une manière exhaustive ce problème à partir d'un treillis fractal. Nous allons reproduire quelques résultats, puis on va introduire notre approche.

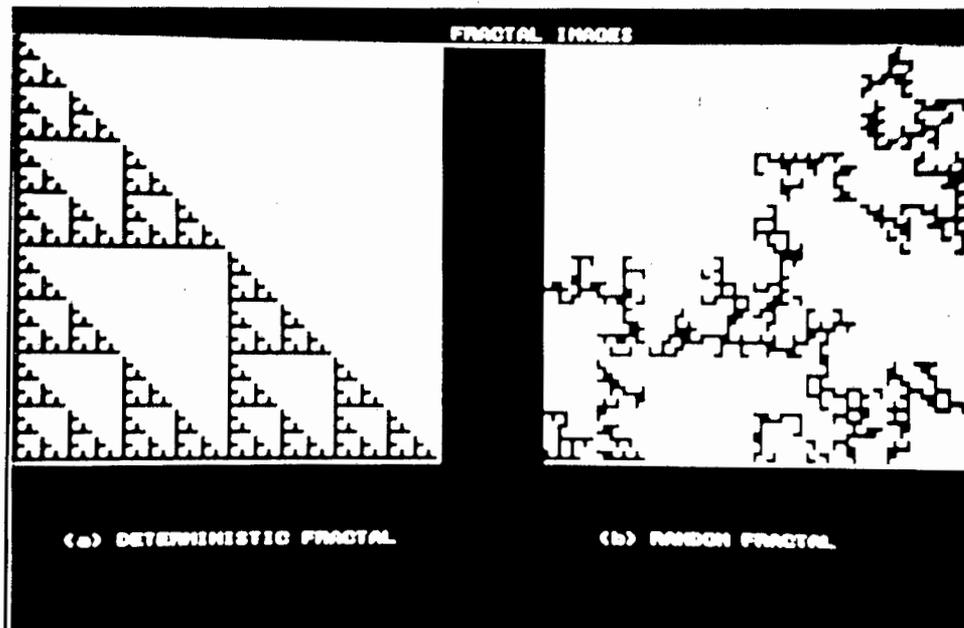
IV.2.- LE TREILLIS FRACTAL.

(Construction Géométrique).

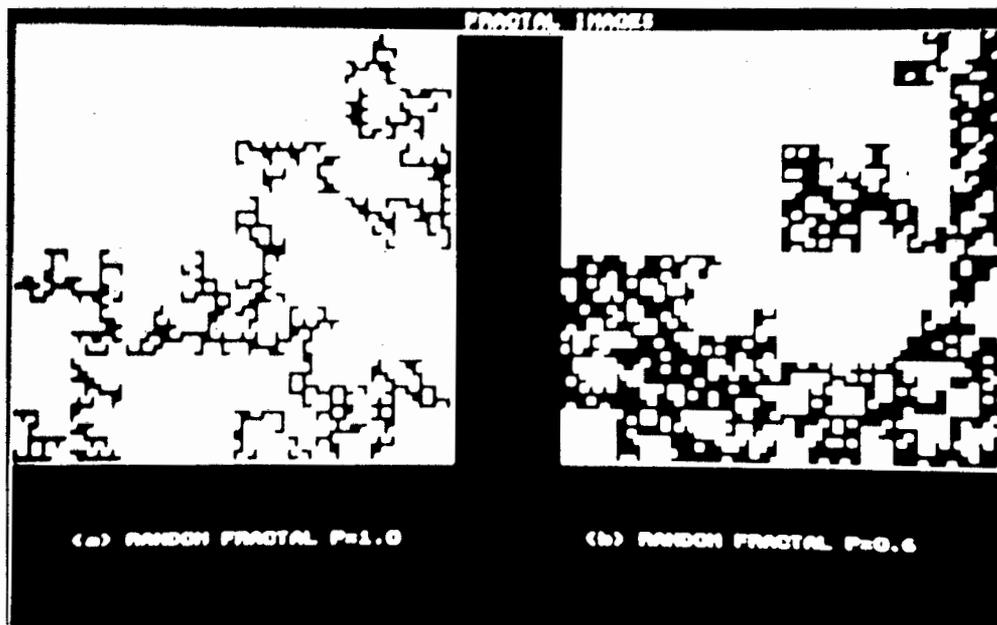
On va commencer par un carré conducteur. On élimine à chaque étape (de manière récursive) un quart (voir figure (IV.1)).



À l'étape " n " de la construction, l'objet serait constitué de $M = 3^n$ carrés de côté " c ", si la taille initiale était $L = 2^n c$. Dans ce cas déterministe, le Treillis Fractal ressemble à l'objet fractal Sierpinski gasket. Tous les deux objets ont la même topologie et la même dimension fractal $D = \text{LOG}(3)/\text{LOG}(2)$. Une réalisation aléatoire est faite en éliminant un carré de manière arbitraire. Sur figure (IV.2)



Figure(IV.2a) .



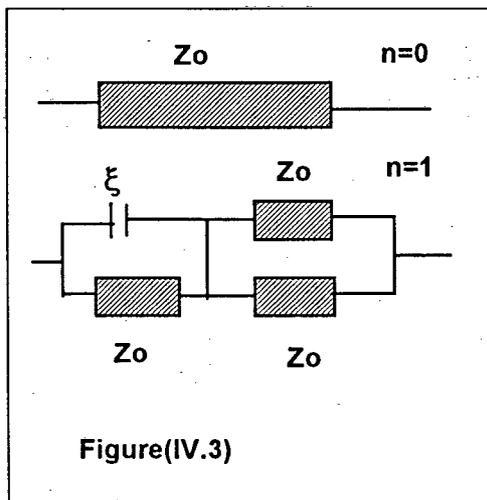
Figure(IV.2b)

Figure(IV.2).- (a) Construction deterministe et aléatoire. Facteur de remplissage $f=3/4$
 (b). Construction Aléatoire $P=1 \rightarrow f=3/4$ et $P=0.6 \rightarrow f=(4-P)/4$.

nous montrons les deux cas; Construction déterministe et Construction Aléatoire. Le modèle du treillis fractal de côté "c" et corrélation en longueur $\xi c=L$ est auto-similaire dans tout l'échelle entre "c" et "L". Il est possible, en choisissant $c=1$, de trouver une correspondance entre l'étape "n" et $\Delta\rho$:

$$2^n = \chi \sim (\Delta\rho)^{-N}$$

On va décrire la généralisation de l'idée de construction de Kirckpatrick proposé dans [8], en permettant un facteur de réduction arbitraire "f" de la fraction conductrice à chaque étape (les figures IV.2 correspondent à $f=3/4$). Le paramètre "f" est appelé facteur de remplissage (filling factor). Une représentation du réseau est montrée sur figure (IV.3). Les carrés conducteurs sont de résistances $Z_0=R$, tandis que les carrés éliminés est une capacitance "C" et impédance $\xi=1/(iC\omega)$ indépendante de la taille.



Pour construire un treillis fractal de valeur arbitraire "f" ($1/2 < f < 1$), on remplace chaque conducteur par une cellule contenant deux conducteurs en parallèle dans la moitié inférieure et la partie supérieure contenant $4(1-f)$ capacitances et $4f-2$ conducteurs (tous en parallèle). A l'étape "n" de la construction le treillis fractal est constitué de 4^n éléments de circuit, parmi lesquels $(4f)^n$ sont conducteurs. De cette façon, l'ensemble

conducteur peut être identifié par sa dimension fractal:

$$d_f = \frac{\log(4f)}{\log(2)} \quad (IV.2)$$

laquelle est définie entre 1 et 2.

L'impédance électrique est définie de manière recursive par:

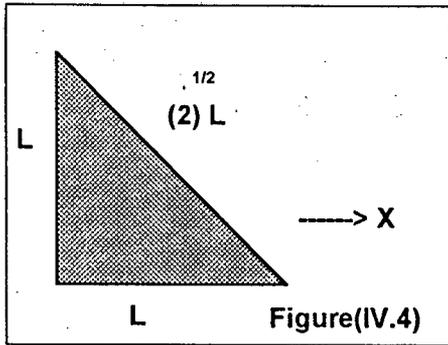
$$Z_n = \frac{Z_{n-1}}{2} + \left[\frac{4(1-f)}{\xi} + \frac{4f-2}{Z_{n-1}} \right]^{-1}$$

IV.3.-CONSTRUCTION ET CARACTERISATION D'UN TREILLIS FRACTAL DETERMINISTE PAR TRANSFORMATIONS MORPHOLOGIQUES.

IV.3.1.- Sierpinski Gasket (S.G.) et les Eléments Critiques.

D'abord, on va commencer pour construire le Sierpinski Gasket (S.G.) (Treillis Fractal Déterministe) en utilisant les éléments critiques des résidus.

On se donne un ensemble compact X initiale (où X est un triangle) de côtés L (figure IV.4).



Soit l'ensemble ouvert G ; $\bar{G} = X$. Donc, G est dense en X . On calcule l'élément critique λ_1 de X :

$$\gamma_{\lambda_1 \bar{G}}(X) \neq \emptyset$$

on peut observer que $\lambda_1 = 1/2$ (facteur d'homothétie). A partir du calcul d'une granulométrie des éléments critiques des résidus on pourra créer notre Sierpinski Gasket à une échelle donnée. Les facteurs d'homothéties des éléments critiques, à l'échelle (ou étape) "n" seront données par la relation:

$$\lambda_n = 1/(2^n)$$

Sur figure (IV.5) nous montrons le résultat obtenue à l'échelle n=3. On peut bien observer que l'ensemble transformé de X complétement pourrait être caractérisé par un squelette par ouvertures. L'élément structurant étant un triangle λG (λ facteur d'homothétie).

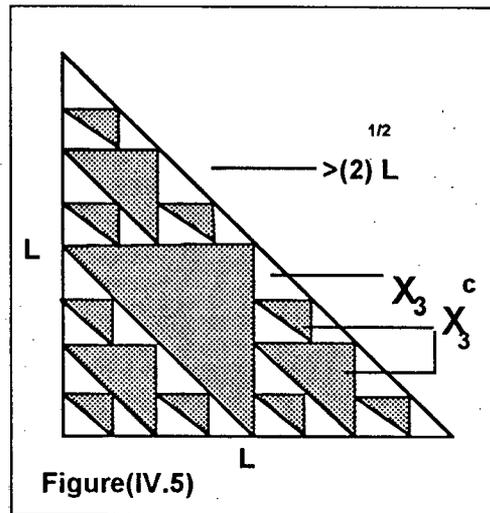
Nous aurions la fonction d'extinction:

$$q_x(X) = \begin{cases} S(X) \rightarrow R^+ \\ x \rightarrow \lambda_n, B(x, \lambda_n); \max. \end{cases}$$

(IV.3)

On en parlera de ce type de caractérisation lors d'une modélisation plutôt fréquentielle) dans un prochaine étude.

$$\mu_1(\zeta_{\lambda_0}) + \sum_{i=1}^n \mu_1(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i-1}})) = \mu_1(X_n)$$



Considérons une caractérisation d'un point de vue granulométrique. On caractérise d'abord les résidus de X . Après différence ensembliste des éléments critiques sur les résidus on aura:

$$X_1 = X / \gamma_{\lambda_1}(X) \quad \lambda_1 = 1/2 \text{ élément critique.}$$

$$X_2 = X_1 / \gamma_{\lambda_2}(X_1) \quad \lambda_2 = 1/(2^2) \text{ élément critique.}$$

o o o o o

$$X_n = X_{n-1} / \gamma_{\lambda_n}(X_{n-1})$$

$$\lambda_n = 1/2^n \text{ élément critique.}$$

En mesurant les éléments X_n , nous avons d'une part

le périmètre:

$$\mu_1(X_n) = \mu_1(X_{n-1}/\gamma_{\lambda n}(X_{n-1})) =$$

$$\frac{3^n}{2^n} \mu_1(X) = \frac{3^n}{2^n} (2 + \sqrt{2})L$$

et l'aire:

$$\mu_2(X_n) = \mu_2(X_{n-1}/\gamma_{\lambda n}(X_{n-1})) =$$

$$\frac{3^n}{4^n} \mu_2(X) = \frac{3^n}{4^n} (L^2/2)$$

où μ est la mesure de Lebesgue (μ_1 le périmètre, μ_2 l'aire, μ_3 le volume).

D'autre part, la mesure sur les éléments critiques sera donnée par:

$$\sum_{i=1}^n \mu_1(\gamma_{\lambda i}(\zeta_{i+1})) =$$

$$(1/3) \sum_{i=1}^n \left(\frac{3^i}{2^i}\right) (2 + \sqrt{2})L \quad (IV.4)$$

et pour l'aire:

$$\sum_{i=1}^n \mu_2(\gamma_{\lambda i}(\zeta_{i+1})) =$$

$$(1/3) \sum_{i=1}^n \frac{3^i}{4^i} (L^2/2) \quad (IV.5)$$

Par le critère de convergence du cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{3^{n+1}/4^{n+1}}{3^n/4^n} \right| = 3/4 < 1$$

Il existe donc, convergence absolue. 3/4 étant le facteur de remplissage. Pour n à l'infini l'aire converge à $(L \cdot L)/2$. Tandis que le périmètre diverge. Néanmoins, il existe une relation entre le périmètre de X_n et celui des résidus donnée par:

$$\text{avec } \zeta_{\lambda 0} = X. \quad (IV.6)$$

* OBSERVATION: La notation a été inversée à celle qu'on a définie dans l'équation [III.5].

Egalement, entre l'aire de X_n et celle des éléments critiques on a la relation suivante:

$$\mu_2(\zeta_{\lambda 0}) - \sum_{i=1}^n \mu_2(\gamma_{\lambda i}(\zeta_{\lambda i-1})) = \mu_2(X_n) \quad (IV.7)$$

On va tirer quelques conséquences de cette dernière équation. Nous normalisons (IV.7) par rapport à $\mu_2(\zeta_{\lambda 0}) = \mu_2(X)$;

$$1 - \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_i-1})) \right) / \mu_2(X) = \frac{\mu_2(X_n)}{\mu_2(X)}$$

Dans l'objet fractal qu'on utilise nous avons;

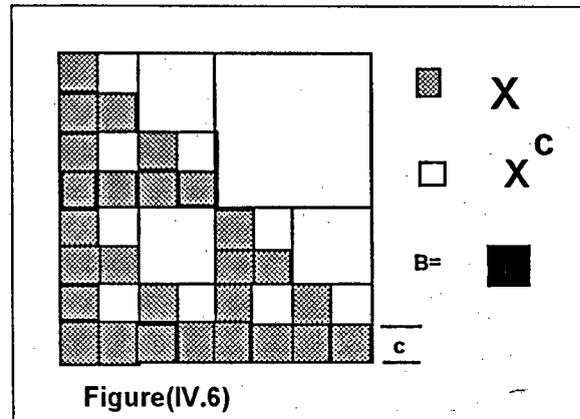
$$\mu_2(X_n) = \frac{3^n}{4^n} L^2 / 2; \mu_2(X) = L^2 / 2$$

alors;

$$1 - \left(\sum_{i=1}^n \mu_2(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_i-1})) \right) / \mu_2(X) = \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(IV.8)

types de fractals ayant la même dimension. Le premier étant déterministe, le deuxième étant aléatoire. En utilisant la même démarche pour construire l'objet fractal aléatoire (section IV.2) nous allons le caractériser par une Granulométrie par Ouvertures et par une Granulométrie des éléments critiques des résidus.



Figure(IV.6)

independant de "L". On va définir cette nouvelle fonctionnelle par:

$$F_{cri}(\lambda_n) = \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

en calculant le LOG nous arriverons au résultat suivant:

$$\text{LOG}(F_{cri}(\lambda_n)) = n \text{LOG}(3/4)$$

qui est une droite de pente LOG(3/4).

A différence de la démarche utilisée dans la section(IV.3) où X était un triangle, ici on considère le carré. Nous avons vu que à l'étape "n" si le côté du carré était "c", alors le côté du carré initial serait $L = 2^n c$. Le périmètre suit une même loi. Le facteur de remplissage étant 3/4 à toute étape quelque soit la nature de l'objet fractal (déterministe ou aléatoire)..

Qu'est-ce se passe-t-il dans le complémentaire?.

Considérons L=1, alors, l'aire pour "n" sera donné par :

$$n=1 \quad (1/3) \frac{3^1}{4^1}$$

$$n=2 \quad (1/3) \left(\frac{3^1}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} \right)$$

$$n=3 \quad (1/3) \left(\frac{3^1}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3} \right)$$

IV.4.- CARACTERISATION D'UN OBJET FRACTAL ALEATOIRE PAR LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE.

On a montré la manière de construire un objet fractal déterministe par des transformations morphologiques. Nous allons suivre une autre démarche pour construire et caractériser un objet fractal. Sur figure (IV.2) on montre deux

$$n \quad (1/3) \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

On obtient une caractérisation similaire à celle qu'on a obtenu sur section (IV.3).

Proposition. Soient X l'ensemble initiale et les λ_i les éléments critiques des résidus $\zeta_{\lambda_{i+1}}(X)$. Alors:

$$\bigcup_i \overline{\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i+1}})} = X$$

$$\bigcap_i \gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i+1}}) = \emptyset$$

$$\mu\left(\bigcup_i \gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i+1}})\right) = \sum_i \mu(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_{i+1}})) = X$$

Caractérisation une Granulométrie par des éléments critiques des résidus de X.

Soit B l'élément structurant un carré de côté 1/2 et ayant l'origine au centre du carré. λ un facteur d'homothétie entre 0 et 1. En calculant les éléments critiques des résidus de X^c les facteurs d'homothétie auront les valeurs:

$$\lambda_1 = 1/2^n, \lambda_2 = 1/2^{n-1}, \dots, \lambda_n = 1/2$$

On calcule les fonctions de distribution $Fecr(\lambda_i, X)$ et de densité $Gecr(\lambda_i, X)$ des éléments critiques des résidus. Sur figure (IV.7) on montre les deux fonctions pour le cas déterministe et le cas aléatoire. Nous travaillons ici dans le treillis $\wp(Z^2)$ (images binaires de 256x256). On observe que les structures à différentes échelles sont bien détectées (64,32,16,...). En plus, la relation

$$Gecr(\lambda_i, X^c) / Gecr(\lambda_{i+1}, X^c) = 3/4$$

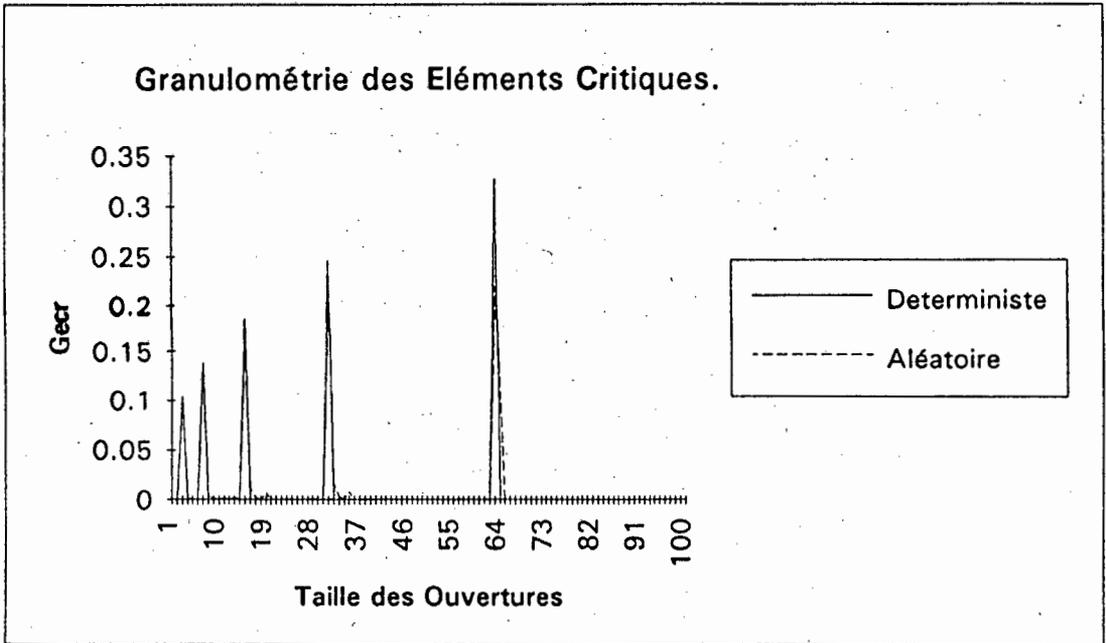
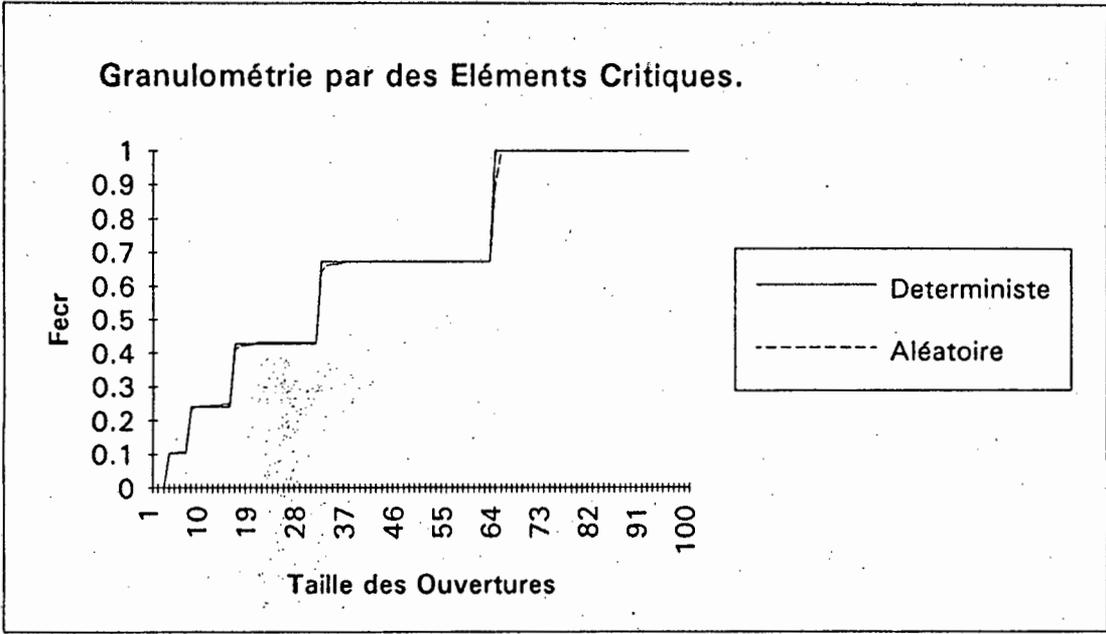
pour tout "i" est correcte, qui est le facteur de remplissage.

Ce facteur est vérifié, même dans le cas aléatoire. Dans ce cas, il faut réunir dans une même classe λ_n les valeurs voisines des fonctions $Fecr$ et $Gecr$. Par exemple, pour $\lambda_n=64$, nous donnons la nouvelle valeur a $Gecr(64, X) = Gecr(63, X) + Gecr(64, X) + Gecr(65, X)$ et $Gecr(63, X) = 0, Gecr(65, X) = 0$. Ce re-échantillonnage permettra de vérifier le facteur de remplissage.

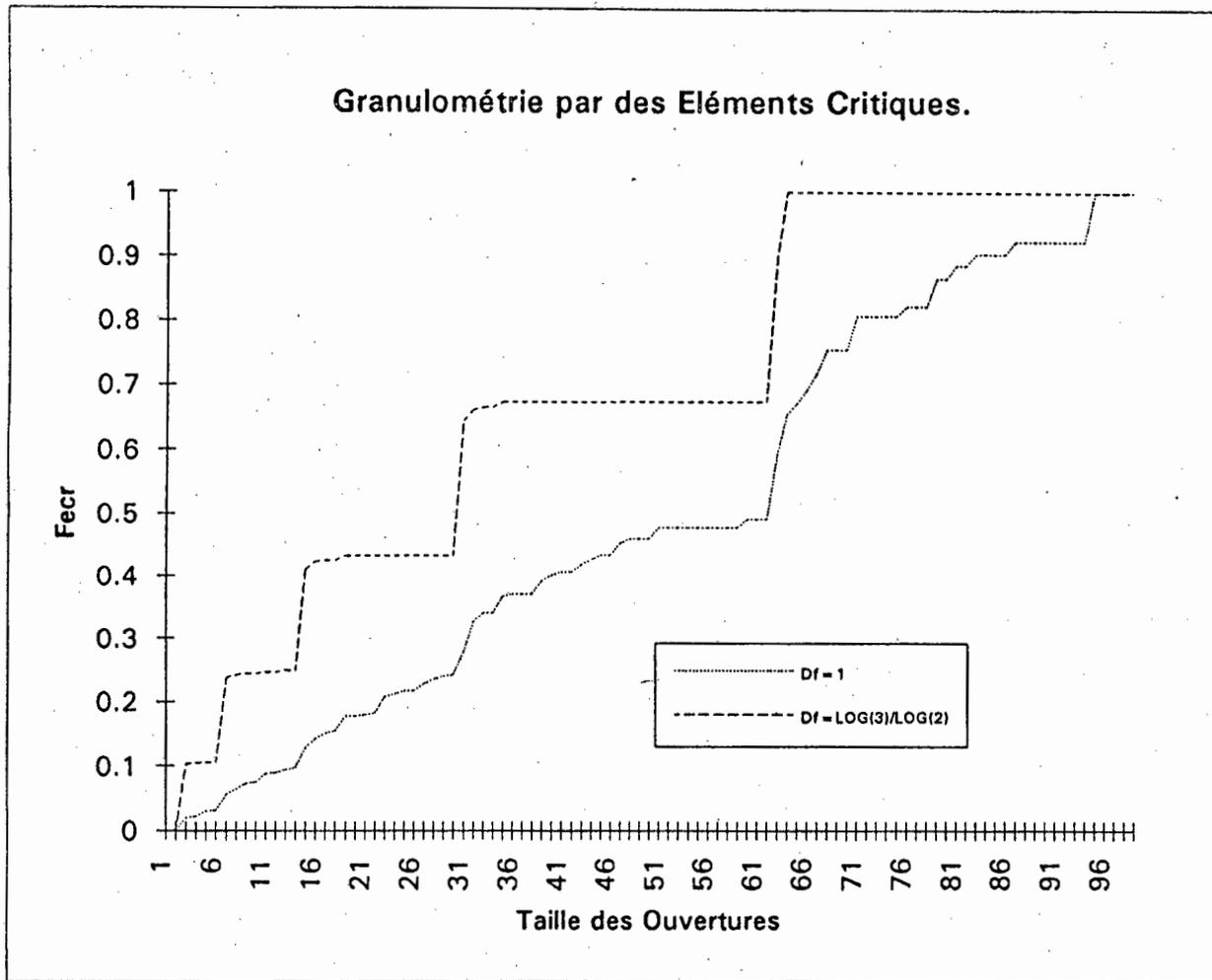
Pour analyser le comportement de $Gecr()$ et $Fecr()$ sur un objet non-fractal, on a créé des images ayant un facteur de remplissage égal à 1/2. Ceci correspond à une dimension fractal égal à 1 (Df=1). Donc, de même dimension topologique. La courbe sur figure(IV.8) montre que il n'y a plus une bonne définition des classes, donc des structures bien séparées à différentes échelles et fonction de 2^n .

Caractérisation par une Granulométrie par des Ouvertures.

On considère également B l'élément structurant étant un carré de mêmes caractéristiques que dans le cas d'une granulométrie des éléments critiques. On calcule la fonction de densité et de distribution granulométrique $F(\lambda, X)$ et $G(\lambda, X)$. Sur figure



Figure(IV.7) (a) .- Fonctions de Distribution Granulometrique des Eléments Critiques. Cas deterministe et cas aléatoire. (b).- Fonctions de Densité Granulométrique des Eléments Critiques, Cas deterministe et cas aléatoire.



Figure(IV.8).- Granulométrie des Eléments Critiques Fecr pour une dimension Fractale $\text{Log}(3)/\text{Log}(2)$ et pour $D_f = 1$.

(IV.9) et (IV.10) nous montrons les résultats obtenus. Il est intéressant à commenter:

1) Les différentes échelles sont bien détectées et séparées (64,32,16,...).

2) Le facteur de remplissage peut être calculé sur le fractal aléatoire, néanmoins il n'est pas possible de le faire sur le fractal déterministe. Il faudrait utiliser un triangle comme élément structurant.

3) On détecte d'autres structures, ayant un comportement fractal entre deux échelles intermédiaires. Par exemple, entre $\lambda=32$ et $\lambda=64$ on trouve des structures aux échelles $\lambda=32+8$ et $\lambda=32+16$.

2) Les différentes échelles des structures des transformées sont bien détectées et représentent le comportement réel de l'objet fractal.

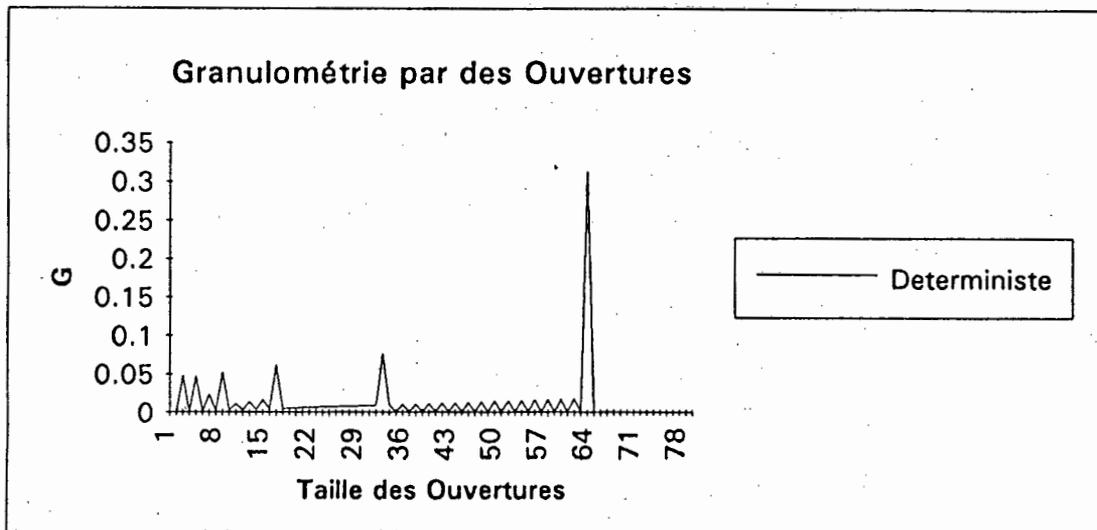
3) On peut avoir un estimé du périmètre à différentes échelles à partir de l'équation IV.6. Ceci permettra de connaître la dimension fractal. On sait bien que le périmètre est un paramètre peu fiable en Analyse d'Images. Néanmoins, par construction de cet objet fractal, cette mesure peut être utilisée avec de bons résultats.

4) Question: Qui donne-t-il la meilleure caractérisation G_{ecr} (F_{ecr}) ou G (F)?

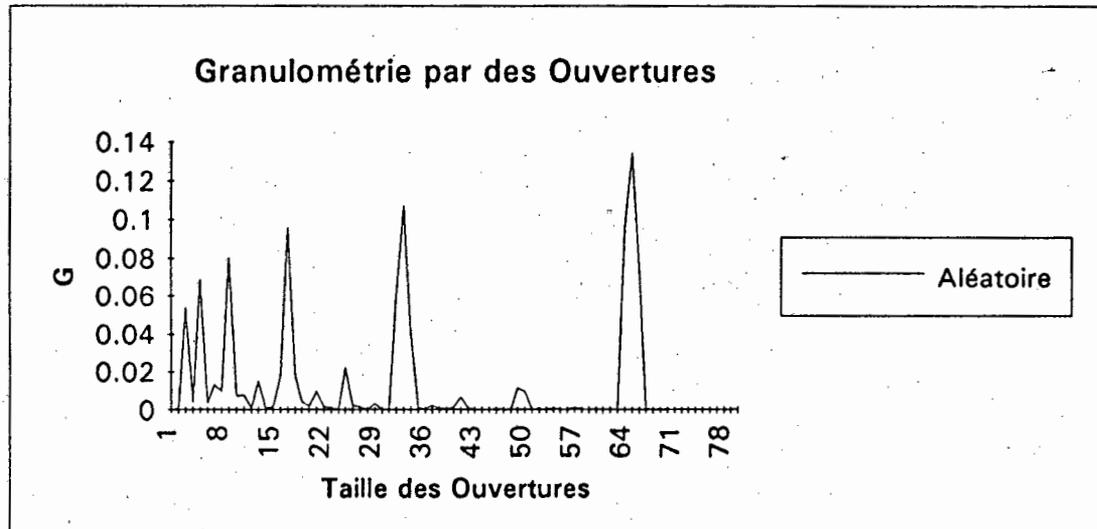
IV.5 RENSEIGNEMENTS TIRES DE CE TYPE DE CARACTERISATION.

La caractérisation d'un objet fractal X_n (à l'échelle "n" peut être réalisée par de transformations morphologiques: Granulométrie par des Ouvertures et Granulométrie des éléments critiques des résidus. Ce type d'approche est différent d'autres déjà rapportées dans la bibliographie ou l'on utilise des dilatations (transformations non-idempotentes). Dans notre cas, les deux manières de caractériser (granulométrie par des ouvertures et par des éléments critiques), donnent des résultats semblables l'une de l'autre. Néanmoins, la granulométrie semble-elle extraire d'autres informations à une échelle intermédiaire et qui présentent des caractéristiques bien corrélées avec l'objet fractal. D'une façon générale:

1) Les caractéristiques fractales peuvent être déterminées par des transformations idempotentes (ouvertures) en travaillant sur le complémentaire de l'objet fractal.

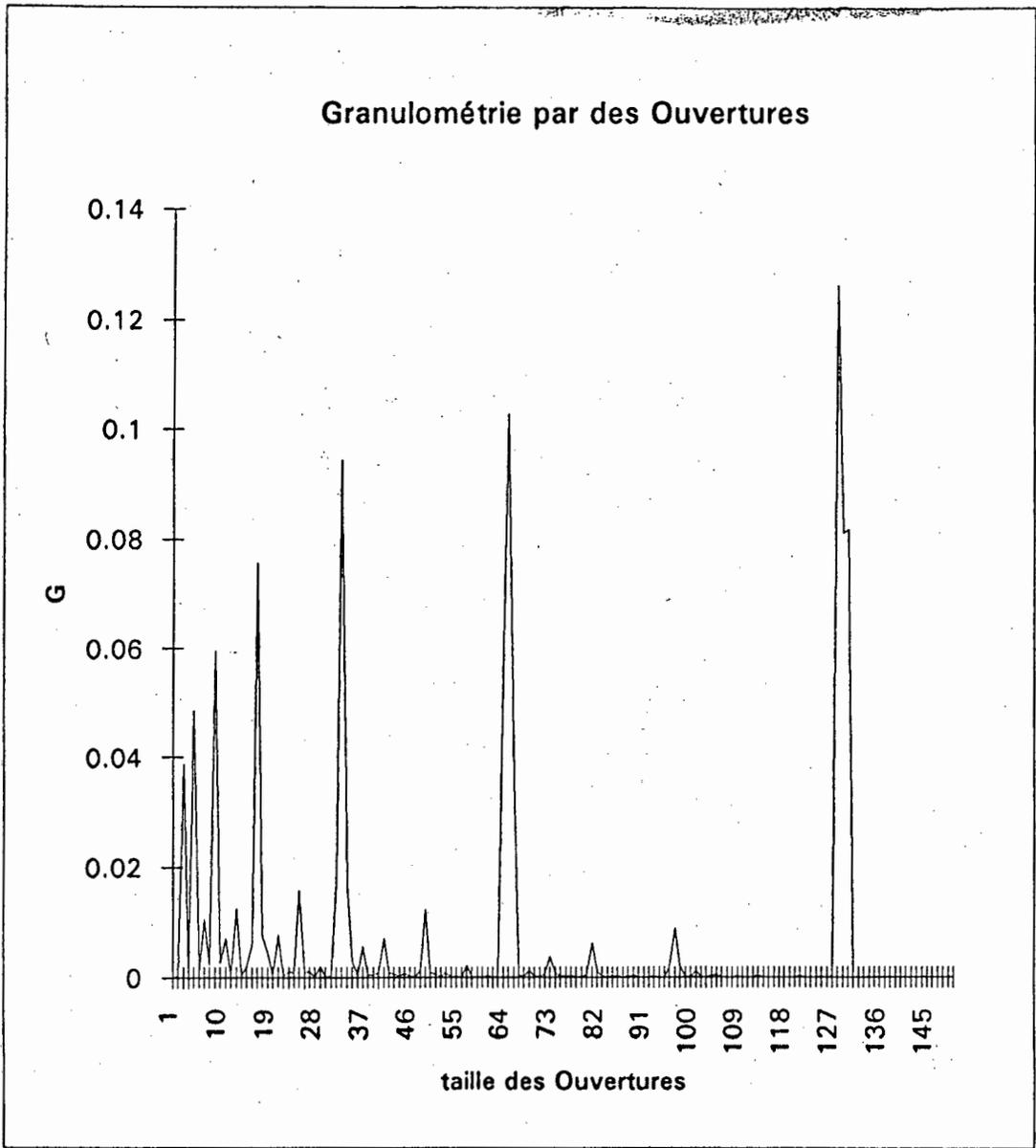


(a)



(b)

Figure(IV.9).- Fonction de Densité Granulométrique par des Ouvertures $G()$.
 (a) .- Cas deterministe, (b).- Cas aléatoire.



Figure(IV.10).- Fonction de Densité Granulométrique par des ouvertures.
Images 512x512 cas aléatoire.

V.-CAS GENERALE D'UNE CARACTERISATION D'UN OBJET FRACTAL PAR DES TRANSFORMATIONS MORPHOLOGIQUES.

V.1.- INTRODUCTION.

On a vu dans le chapitre précédent la manière de détecter et caractériser un objet fractal par des transformations morphologiques. Dans ce partie, on va suivre deux axes différents pour généraliser et étudier des objets fractals par intermédiaire de comparaison d'un objet fractal donné et certains références. Une première étude consiste à créer un objet fractal (avec un facteur de remplissage $3/4$ par exemple), ensuite, construire d'autres objets à partir de cet élément de base (en faisant des unions par exemple) afin de créer une deuxième référence. La première pourrait être considérée comme la référence d'une probabilité p_c (seuil de percolation) et la deuxième comme une référence p_m (étant la conductivité maximale souhaitable). Puis, comparer une préparation intermédiaire avec le deux références et savoir le degré de proximité à celles-ci.

Une deuxième voie, consiste à changer le facteur de remplissage, comme on l'a décrit au début du chapitre IV. Nous proposerons une manière légèrement différente pour concevoir ce facteur de remplissage. Nous verrons qu'on arrive au mêmes résultats, d'un point de vue d'un réseau électrique, que ceux qu'on a obtenu dans [8].

V.2.- Combinaisons Linéaires entre différentes Structures Fractals.

Deux types de transformations ont été décrites et appliquées dans les chapitres précédents

pour caractériser un objet fractal; (a) Granulométrie par des Ouvertures et (b) Granulométrie des éléments critiques des résidus. Ayant certains différences, il semble qu'ils sont, tous les deux, utilisables pour la caractérisation des objets fractals.

D'après l'introduction, nous allons suivre la démarche suivante; 1) on va caractériser séparément deux références par des transformations morphologique, 2) puis on va réaliser la même procédure de caractérisation d'un produit intermédiaire et, 3) on va réaliser une combinaison linéaire entre les mesures des caractéristiques morphologiques des références en fonction des celles d'un produit intermédiaire. Ce type de démarche a été déjà utilisé dans [9]. En utilisant des modèles morphologiques théoriques (Modèle de Feuilles Mortes, Modèle Booléenne,...) on a pu montrer qu'il était possible d'arriver sans aucune hypothèse, à des bons résultats. Néanmoins, dans la même référence [9], on a utilisé la Granulométrie par des Ouvertures avec des résultats, dans certains cas, aberrants. La raison des ces problèmes lors de son utilisation était, presque sûrement, dû au fait qu'il faut faire des hypothèses (assez fortes) pour suivre ce type de démarche. Nous reproduisons ces hypothèses dans ce partie:

Première hypothèse: Il n'y a pas d'interaction entre les composants de base de la structure (c'est le cas trivial).

Deuxième hypothèse : Il y a des interactions entre les composants de base de la structure et l'on considère donc que les fonctions de distribution et densité granulométriques comme des transformations remplissant la propriété d'additivité.

Si nous observons les courbes granulométriques (aussi bien pour le cas de la granulométrie par des ouvertures comme pour la granulométrie des éléments critiques), on pourrait vérifier que les différentes classes (les structures de base) sont bien séparées les unes des autres. Cette observation nous permet d'assurer que la caractérisation par

ces deux types de transformations remplissent les hypothèses pour les utiliser.

Pour vérifier ces suppositions nous allons suivre l'expérience suivante;

1) On va créer un fractal X_n^{pc} de facteur de remplissage 3/4 (comme celui qu'on a déjà décrit). On va le caractériser comme la première référence (seuil pc par exemple).

2) On va faire l'union de trois réalisations aléatoires de cet objet fractal $X_n^1 \cup X_n^2 \cup X_n^3 = X_n^{pmax}$, et on va le caractériser comme la deuxième référence.

3) On va créer des produits intermédiaires (union de deux fractals par exemple) et on fera la comparaison avec les références.

Une deuxième hypothèse et ici nécessaire:

Soient $X_n^1, X_n^2, X_n^3, \dots$ des réalisations différentes. Alors pour $n \gg 1$ (facteur de échelle assez grande) nous supposons:

$\mu(X_n^i \cap X_n^j) \approx 0$ p.s. (presque sûrement) pour $i \neq j$ alors:

$$\sum_{i=1}^n \mu(X_n^i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n X_n^i\right)$$

L'hypothèse, bien qu'elle est générale, dans le cas pratique dépendra de la résolution de l'image. Sur figure (V.1) et V.2) nous montrons les images des unions de fractals.

Il semblerait que nous pensons travailler avec X_n , et non pas avec le complémentaire. Nous rappelons que les équations (IV.6) et (IV.7) nous permettent de lier X_n avec les éléments critiques. Nous reproduisons une partie de ces équations et qui seront les fonctionnelles qu'on va utiliser.

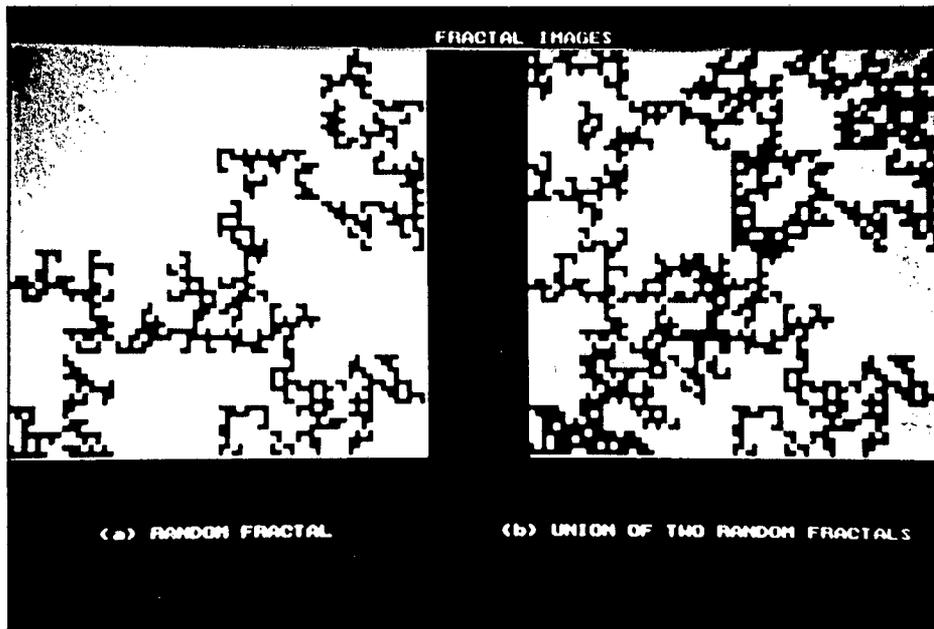
$$\sum_{i=1}^n \mu_1(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_i-1})) = \Psi_1(\lambda_n, X)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_2(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_i-1})) = \Psi_2(\lambda_n, X)$$

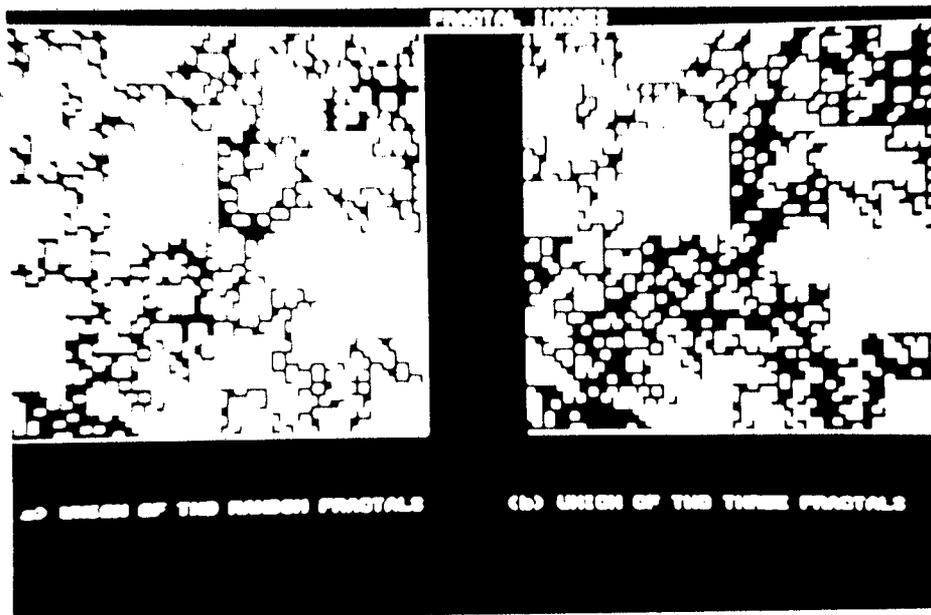
le facteur $\mu(\zeta_{\lambda_0})$ a été éliminé des équations puisqu'il s'agit d'une constante pour les références et les produits intermédiaires. Nous observons que nous ne définissons pas de nouvelles fonctions, il revient à travailler avec les fonctions de distribution et de densité des éléments critiques.

Une fois établies les hypothèses et conditions de travail, nous allons prendre le cas le plus simple en utilisant seulement deux références. On va définir notre notation aussi bien dans le cas de la granulométrie par des ouvertures que pour celle-ci des éléments critiques.

$G_{ecr}(\lambda_i, X^{pc}), F_{ecr}(\lambda_i, X^{pc})$ sont les références des fonctions de distribution et densité des éléments critiques de la structure fractal au seuil de percolation "pc".



Figure(V.1) .- Fractal $\text{Log}(3)/\text{Log}(2)$ et Union de deux Fractals $\text{Log}(3)/\text{Log}(2)$.



Figure(V.2).- Union de deux Fractals et Union de trois Fractals.

$$G(\lambda_i, X^{pc}), F(\lambda_i, X^{pc})$$

mêmes références, mais pour les fonctions de distribution et densité granulométrique.

$$Gecr(\lambda_i, X^{pmax}), F(\lambda_i, X^{pmax})$$

sont les références des fonctions de distribution et densité des éléments critiques de la structure fractal au seuil maximum de percolation.

$$G(\lambda_i, X^{pmax}), F(\lambda_i, X^{pmax})$$

mêmes références mais pour les fonctions de distribution et densité granulométrique.

$$-G(\lambda_i, X^{pin}), F(\lambda_i, X^{pin}), Gecr(\lambda_i, X^{pin})$$

$Fecr(\lambda_i, X^{pin})$ sont les fonctionnels intermédiaires.

La proximité entre les produits intermédiaires et les références seront faites par des combinaisons linéaires de la forme:

$$\sum_{i=1}^n F(\lambda_i, X^{pin}) = p_1 \sum_{i=1}^n F(\lambda_i, X^{pc}) +$$

$$p_2 \sum_{i=1}^n F(\lambda_i, X^{pmax})$$

$$\sum_{i=1}^n Fecr(\lambda_i, X^{pin}) = p_1 \sum_{i=1}^n Fecr(\lambda_i, X^{pc}) +$$

$$p_2 \sum_{i=1}^n Fecr(\lambda_i, X^p)$$

(V.1)

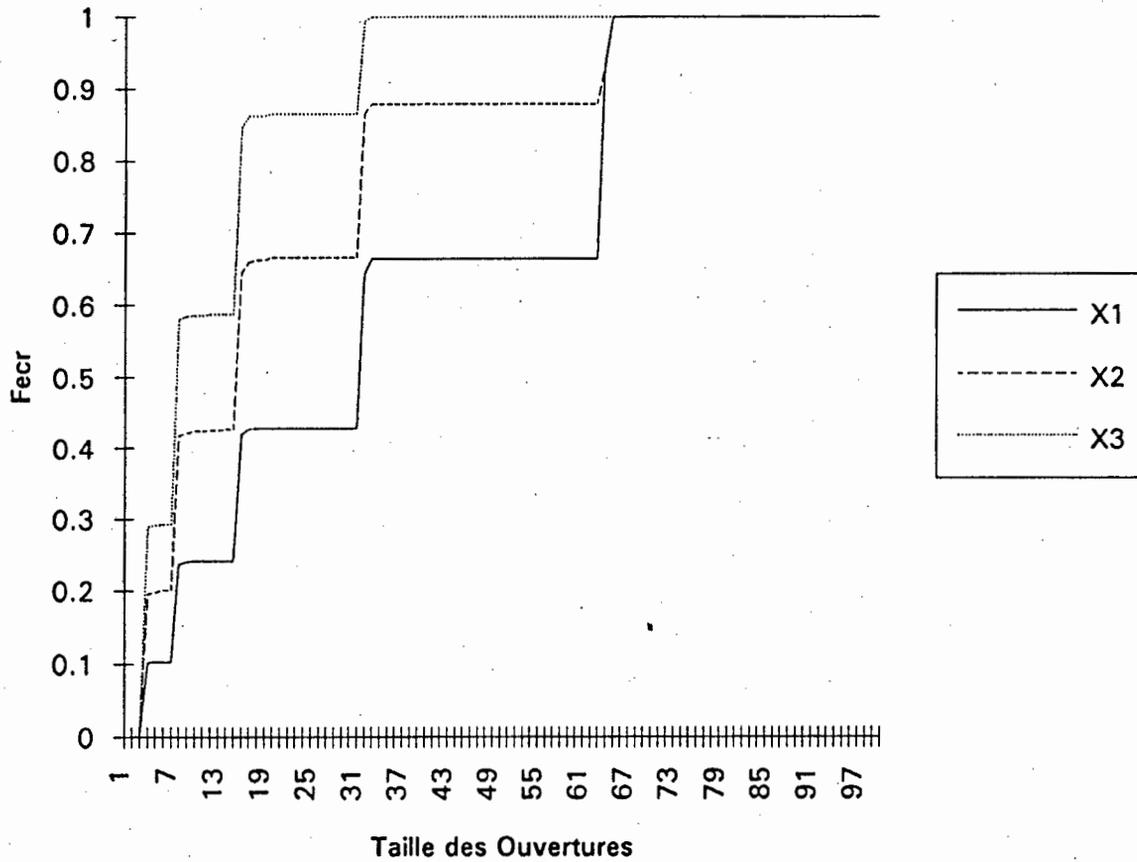
avec la condition $p_1 + p_2 = p_1 + (1 - p_1) = 1$.

Sur figure(V.3) et (V.4) on montre la fonction de distribution des éléments critiques et la fonction de distribution granulométrique par des ouvertures respectivement. Nous observons le caractère baricentrique des courbes intermédiaires par rapport aux références. Ceci dit, que les hypothèses pour l'utilisation d'une Granulométrie (par des ouvertures ou par des éléments critiques) seraient-elles remplies. Cependant, si on observe dans les premières classes des courbes un rapport de proximité similaire, ce ne serait pas le cas pour les dernières classes (64). Ceci est dû au problème de résolution des images (On utilise des images 256x256). On fait la même expérience avec des images 512x512. La figure (V.5) montre les résultats obtenus. Il y a dans ce cas un bon rapport de proximité pour la classe (à 64).

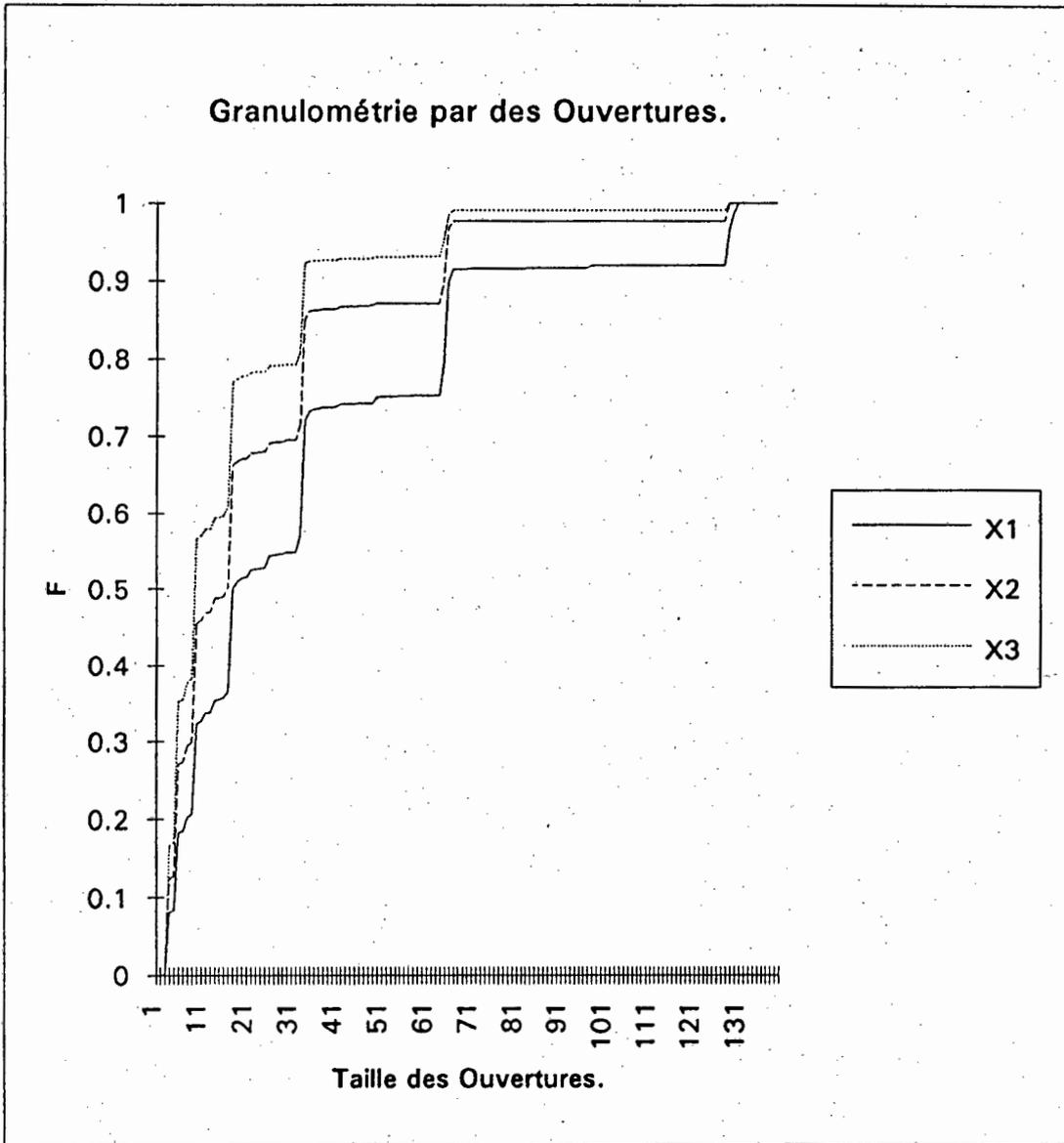
V.3.- Changement de la Dimension Fractal.

Au début du chapitre (IV) (section 1), nous a reproduit la généralisation proposée sur \square afin de décrire le problème de percolation en fonction de la dimension fractal. Ici, on va suivre une démarche similaire, néanmoins une petite variation à cette généralisation est proposée. Notre facteur de remplissage sera changé à la forme suivante:

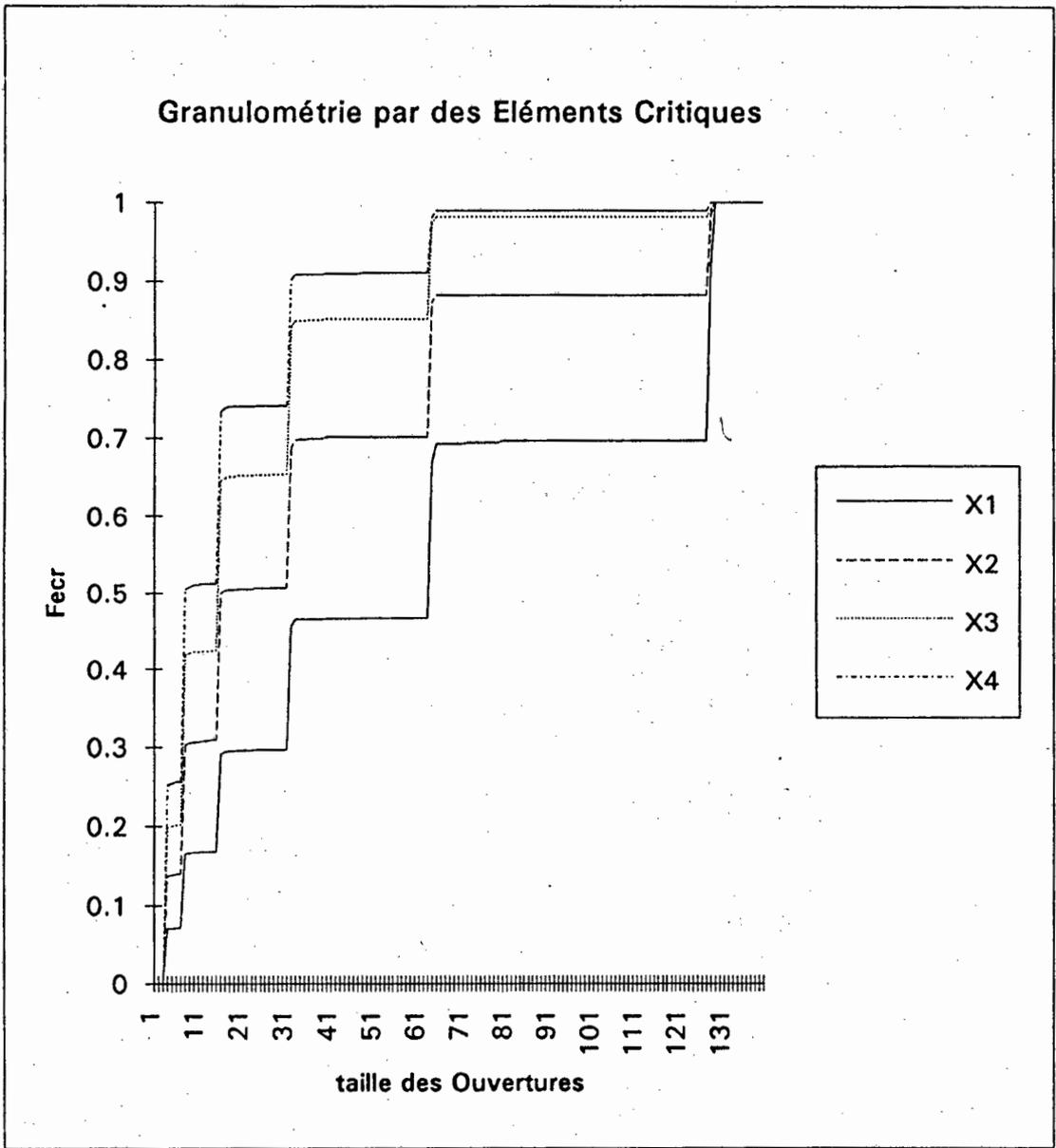
Granulometrie par des Eléments Critiques.



Figure(V.3).- Fonction de Distribution des Eléments Critiques Fecr sur des Images 256x256. X1 fractal $\text{Log}(3)/(2)$. X2 Union de deux fractals. X3 Union de 3 fractals.



Figure(V.4).- Fonction de Distribution Granulométrique par des Ouvertures Images 512X512. X1 Fractal $\text{Log}(3)/\text{Log}(2)$. X2 Union de deux fractals. X3 Union de trois fractals.



Figure(V.5).- Fonction de Distribution Granulométrique des Eléments Critiques Fecr sur des images 512X512. X1 Fractal $\text{Log}(3)/\text{Log}(2)$. X2 Union de deux fractals. X3 Union de trois fractals. X4 Union de quatre fractals.

$P=1$ alors trois cellules p.s. sont remplies.

$P=0$ alors quatre cellules p.s. sont remplies.

(p.s. presque sûrement). Nous aurions des réalisations aléatoires

$$X \in \mathcal{F}'(p) \subset \mathcal{F}(E)$$

où $\mathcal{F}'(p=0) = E$ p.s.

Donc, on introduit une probabilité de remplissage P entre $[0,1]$ qui partitione l'espace E . Le facteur de remplissage est donné par la relation suivante:

$$f = (4 - P)^n / 4^n$$

Et la dimension fractal restera entre 1.5 et 2.

D'après cette convention l'équation (IV.8) aura la forme:

$$1 - \left(\sum_{i=1}^n \mu_2(\gamma_{\lambda_i}(\zeta_{\lambda_i-1})) \right) / \mu_2(X) = \left(\frac{4-P}{4} \right)^n$$

(V.2)

qui est la fonctionnelle qu'on a défini comme $F_{cri}(\lambda_n)$. Après transformation par le LOG sur les deux membres de l'équation

$$\text{LOG}(F_{cri}(\lambda_n)) = n \text{LOG}\left(\frac{4-P}{4}\right)$$

(V.3)

Donc, on aura une famille de droites où les pentes seront données par:

$$\text{LOG}\left(\frac{4-P}{4}\right)$$

Pour vérifier notre approche, un ensemble de test ont été réalisés. D'abord, nous allons comparer les fonctionnelles utilisées en fonction du caractère aléatoire de l'objet fractal. C'est à dire, pour un "p" donné on construit un objet de deux façon différentes:

1) A chaque étape "n" les deux carrés inférieurs et le carré supérieur à gauche sont remplis. Le carré supérieur à droite est rempli par une probabilité "p" donnée.

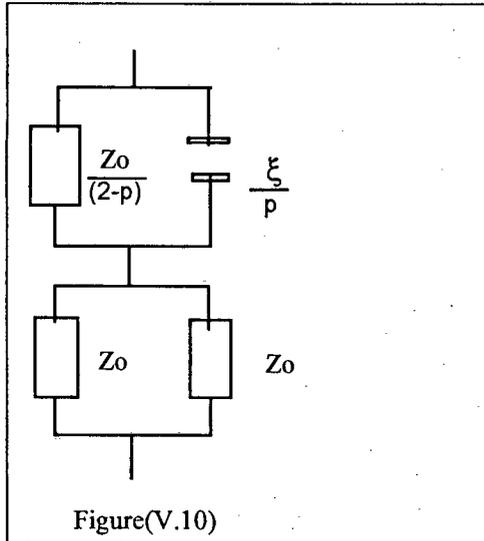
2) A chaque étape "n" trois carrés sont remplis. Ils sont choisis de manière aléatoire. Le carré qui reste est rempli avec une probabilité "p".

Le premier objet aura des réalisations très proches les unes des autres. Tandis que pour (2) nous aurons des réalisations complètement aléatoires, donc très différents les unes des autres.

Quelle est la raison de réaliser ce test? En fait, analyser théoriquement les configurations (1) sont beaucoup plus facile que les réalisations du type (2). Donc, si statistiquement les réalisations du type (1) sont les mêmes que pour les réalisations du type (2) il suffira de caractériser théoriquement (1) pour caractériser les réalisations du type (2). Sur la section (IV.4) nous avons montré que un objet fractal de facteur de remplissage 3/4 avait les mêmes caractéristiques morphologiques et fractal qu'une réalisation aléatoire de facteur de remplissage 3/4 (on l'a montré de manière statistique). Sur figure (V.6) et (V.7) montrent des réalisations aléatoires pour différents valeurs de "p". Tandis que sur figures (V.8) et (V.9) nous montrons les courbes granulométriques des éléments critiques pour les cas (1) et (2) respectivement (avec $p=1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$). Il semble donc, que analyser le cas (1) nous permettra de comprendre le cas (2).

V.4.- Conductivité Eléctrique.

D'après le travail de Clerck et all [8], nous pouvons suivre la même démarche. Sur figure (V.10) nous montrons à nouveau le resau equivalent des cellules.



Figure(V.10)

Donc, pour $p=0$, nous aurions une impédance totale Z_0 . Pour un "p" donné la valeur de l'impédance en fonction de "p" sera donnée par la relation:

$$Z_n = \frac{Z_{n-1}}{2} + \left[\frac{p}{\xi} + \frac{(2-p)}{Z_{n-1}} \right]^{-1}$$

et puisque $f=(4-p)/4$;

$$Z_n = \frac{Z_{n-1}}{2} + \left[\frac{4(1-f)}{\xi} + \frac{(4f-2)}{Z_{n-1}} \right]^{-1}$$

On définit la relation $h_n = Z_{n-1}/\xi$

$$h_n = T(h_{n-1}) = h_{n-1} \frac{(1-f)h_{n-1}+f}{2(1-f)h_{n-1}+2f-1}$$

T est une transformation rationnel qui lie h en deux étapes successives. T peut être vue comme un space réel re-normalisé. Par iteration de cette équation pour $n=0$

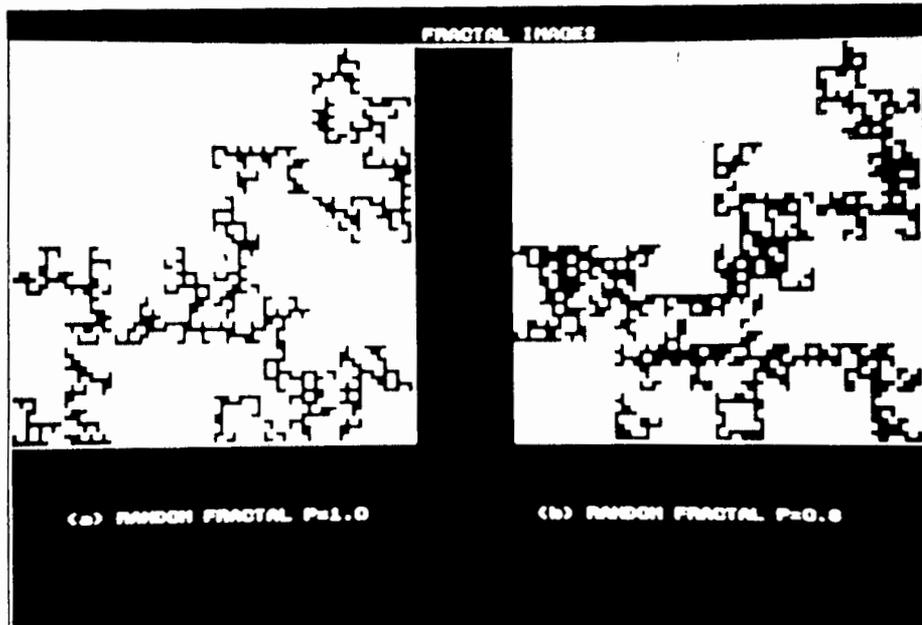
$$h_n = T^n(h_0).$$

Nous reviendrons à tous ces résultats dans un deuxième étude. Ici, on a voulu seulement montrer qu'on pouvait arrivé aux mêmes résultats présentés dans [8].

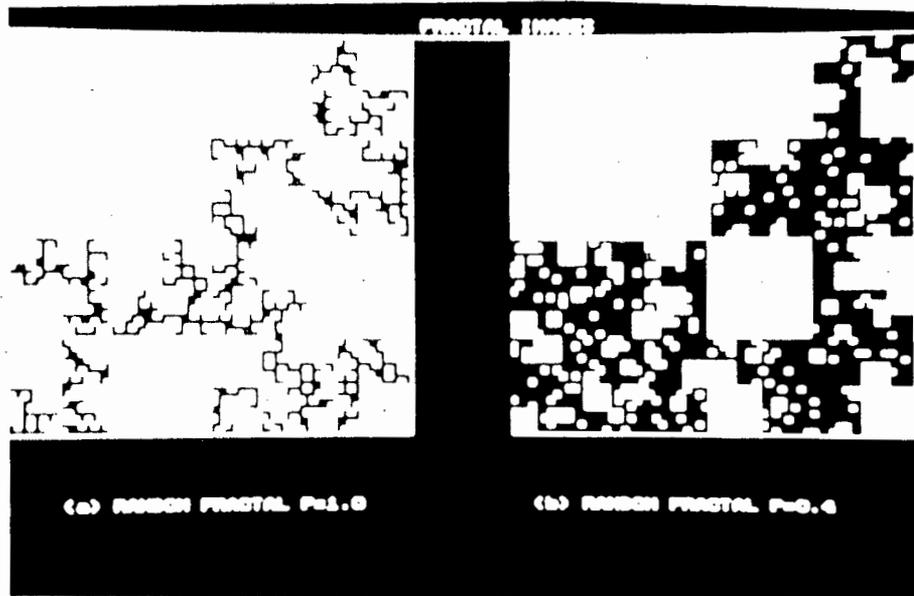
V.5 Le Choix de l'élément structurant.

Le point clé dans l'utilisation des transformations morphologiques est l'élément structurant. C'est l'ensemble qui nous permet transformer l'image, puis après mesure de l'ensemble transformé, connaître les propriétés qui le caractérisent, Anisotropie, homogénéité, Granulométrie,...

Egalement, dans notre approche, le choix de l'élément structurant joue le rôle principale pour la caractérisation de l'objet fractal. Lors de la construction du S.G. (figure(IV.5)), nous l'avons caractérisé par des transformations (Squelette, Granulométrie) ou l'élément structurant avait la forme d'un triangle. C'est élection étant assez évident puisque les structures de base étaient des homothéties d'un triangle. Néanmoins, lors de l'utilisation de carrés comme des éléments structurants, nous sommés arrivés à des résultats similaires. Il était aussi normale en raison de la manière de construire cet objet fractal. C'est ici qu'on se pose une question Quels seront les autres renseignements qu'on puisse extraire à partir d'autres éléments structurants? La figure (V.11) montre le S.G. déterministe et les éléments critiques du S.G. en utilisant des disques(ouverts). Il suffit de trouver les éléments critiques pour la structure la plus grande (Triangle), puis affecter cette caractérisation par un facteur d'homothétie donné par: $1/2^n$. On aura toute l'information complète S.G.

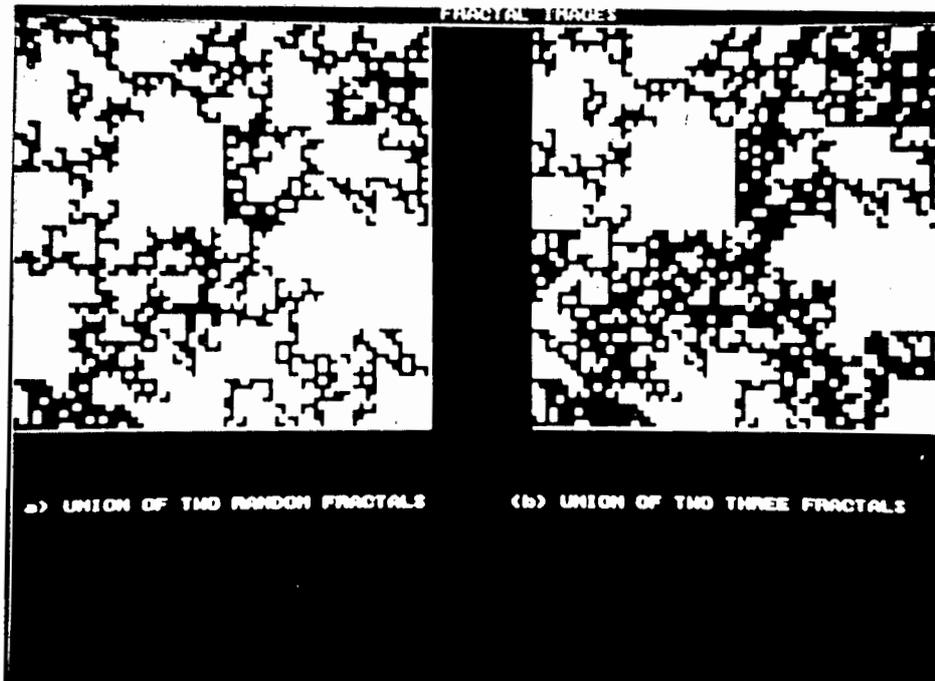


Figure(V.6a) .-

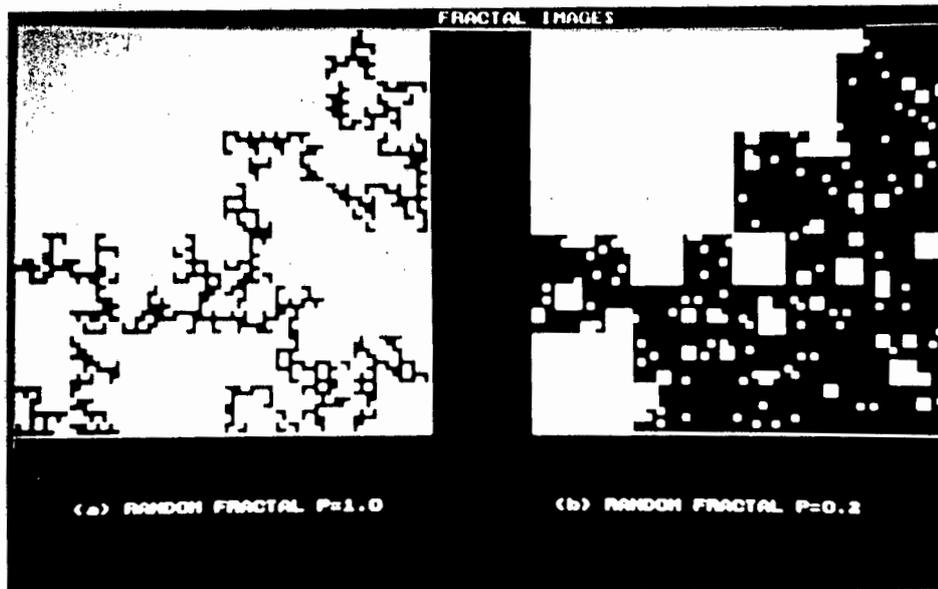


Figure(V.6b).-

Figure(V.6) (a).- Fractal Aléatoire $P=1$ et $P=0.8$ ($f=(4-P)/4$). (b) Fractal Aléatoire $P=1$ et $P=0.6$.

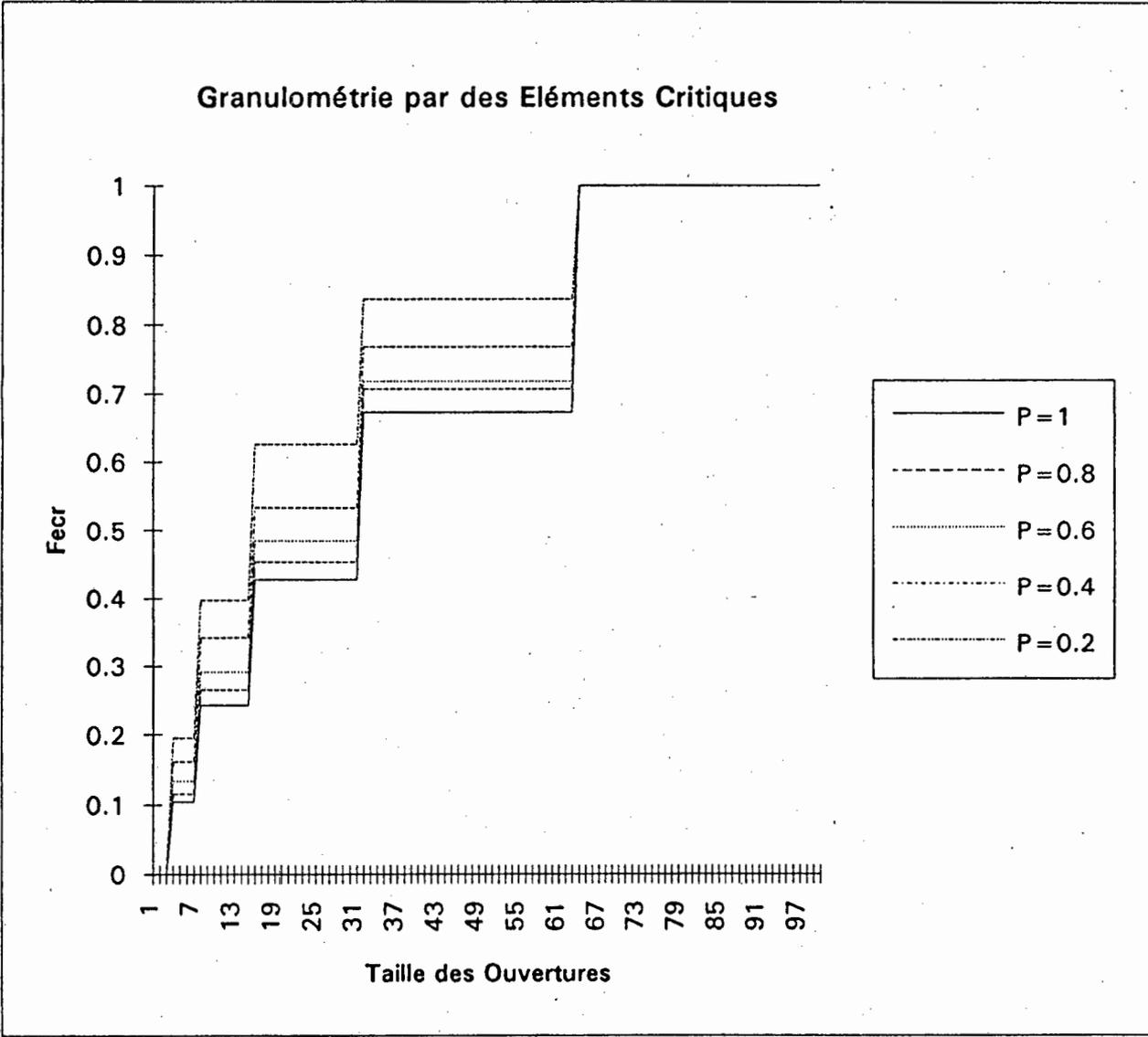


Figure(V.7a) .-



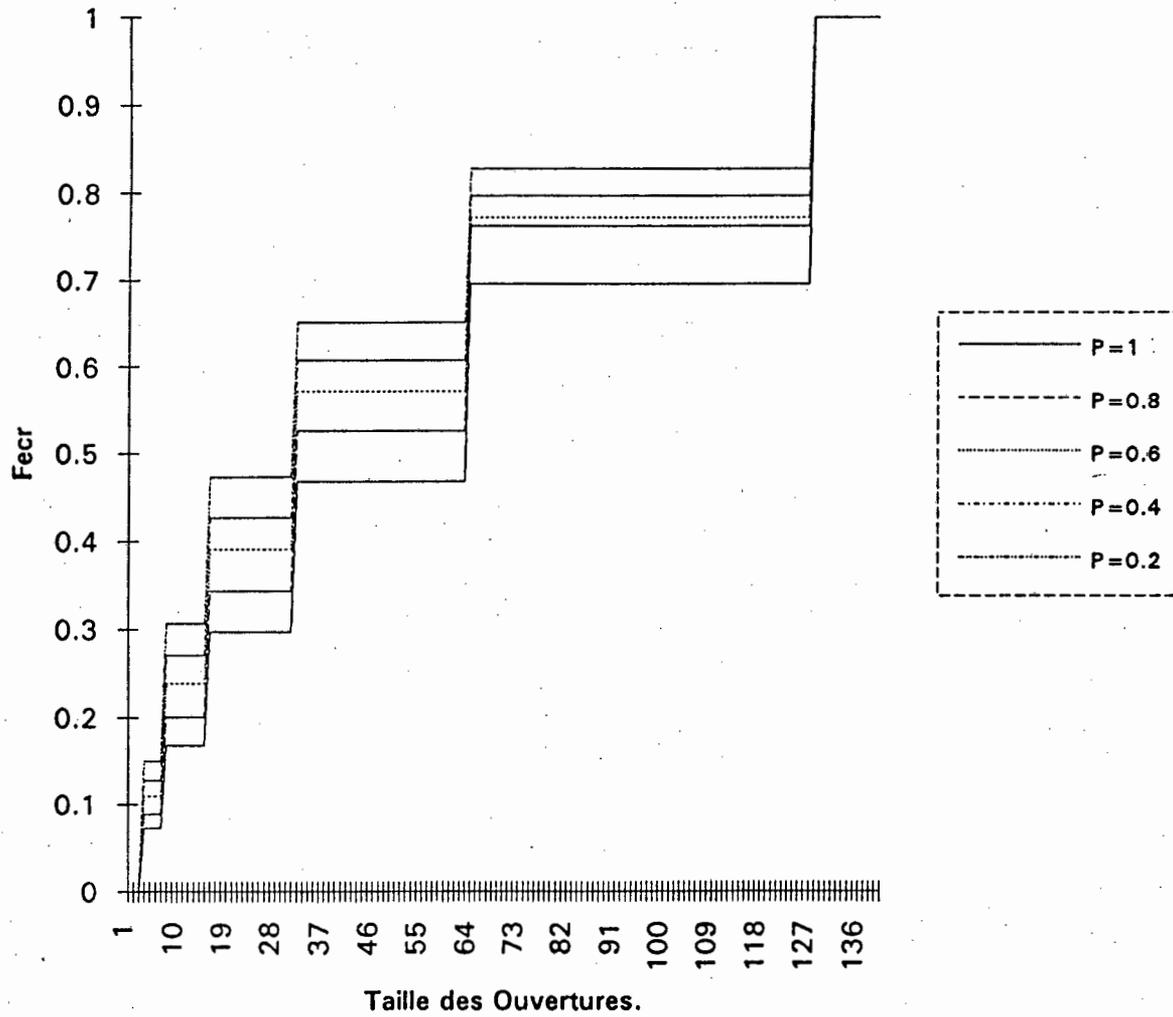
Figure(V.7b).-

Figure(V.7) (a).- Fractal Aléatoire P=1 et P=0.4 ($f=(4-P)/4$). (b) Fractal Aléatoire P=1 et P=0.2.

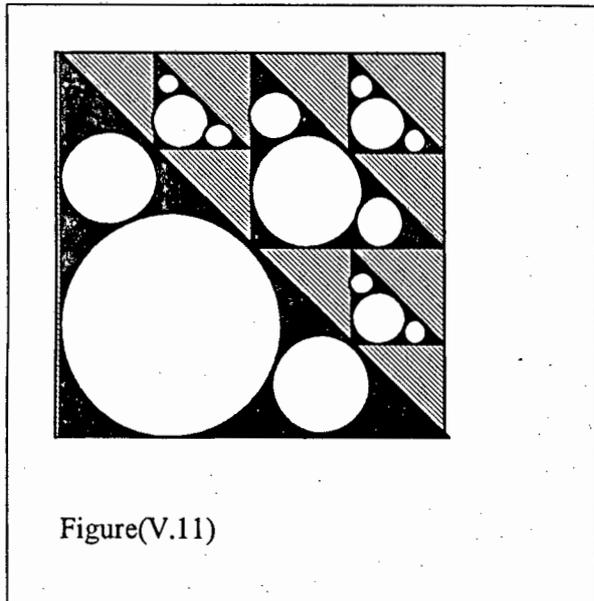


Figure(V.8).- Fonctions de Distribution Granulométrique des Eléments Critiques pour P=1, P=0.8, P=0.6, P=0.4, P=0.2. Cas (1).

Granulométrie par des Eléments Critiques.



Figure(V.9).- Fonctions de Distribution Granulométriques des Eléments Critiques pour ; P=1, P=0.8, P=0.6, P=0.4, P=0.2. Cas(2).



Mais, il pourrait y avoir des conséquences lors de l'utilisations des disques. Sur figure (V.12) nous présentons le APOLLONIAN GASKET (dimension fractal 1.306951). Pour sa construction on utilise 3 disques tangentes deux à deux pour créer un triangle circulaire. Puis on determine les éléments critiques. On observe que cet objet n'est pas auto-similaire. En plus, l'estimation de sa dimension fractal a été un problème difficile à résoudre. Cet objet ressemblerait plus à la caractérisation par des disques. L'analyse de cet objet est beaucoup plus difficile. Donc, le choix de l'élément structurant permettra de mieux comprendre une structure et de mieux l'analyser.

VI. CONCLUSION.

Dans ce travail on a présenté d'une manière très générale le type d'approche de caractérisation des objets fractals. On pourrait même dire trop générale. Cependant, le but principale de ce travail était de montrer des résultats théoriques et expérimentales

préliminaires. L'approche qu'on a proposé nous montre la probable puissance pour son application. Néanmoins beaucoup de questions se posent et pas mal des résultats montrés, restent encore sans une direction très précise. Nous les proposons ici, afin de pouvoir les répondre au fur et à mesure qu'on continuera ce travail.

D'un point de vue théorique on se propose à mieux comprendre l'union de deux fractals. Ce point est très important pour la suite. En M.M., lorsqu'on travaille dans le domaine de modèles aléatoires, on parle de la stabilité. Par exemple l'union de deux réalisations d'un modèle Booléenne est un modèle Booléenne. C'est dans ce cadre que nous nous placerons pour répondre à cette question. D'autres possibles relations avec les modèles en M.M. seront cherchés (Le modèle de droites poissonniennes figure (V.13) serait intéressante à étudier tout au début).

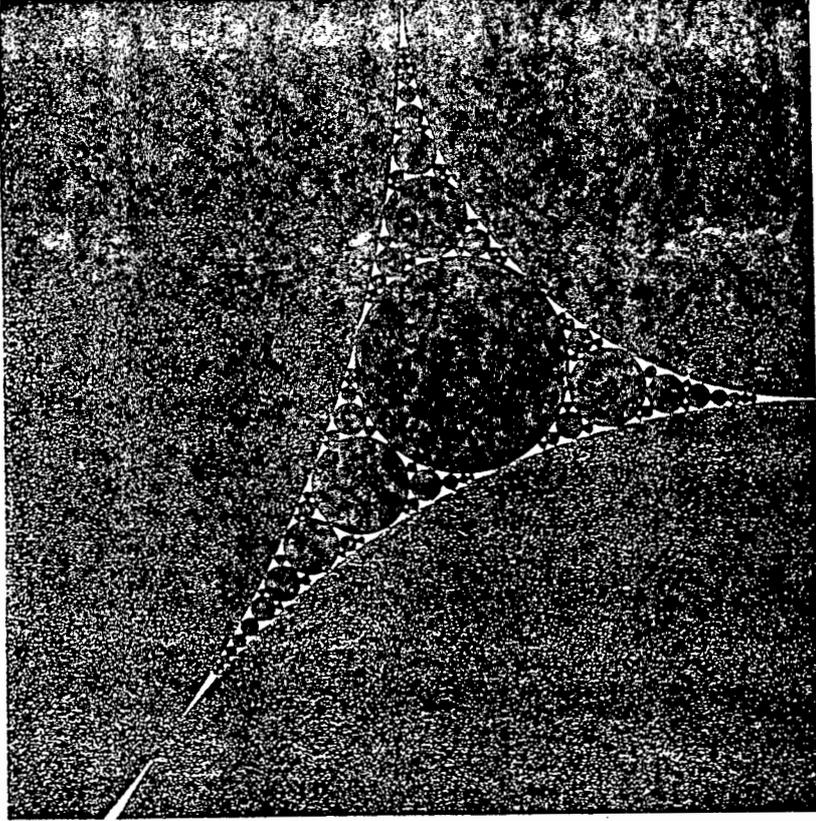
Sur le plan pratique, nous nous proposons de caractériser correctement le problème de Percolation (comme dans le travail réalisé dans [8]). On étudiera les possibilités de estimer la corrélation en longueur par notre méthode.

Une autre voie, proposée par J.C. Pineda Castillo, consiste à essayer de caractériser les correcteurs d'ordre non-entier (théorie développée par Oustaloup). Egalement quels sont les conséquences de prendre en compte un analyse de voisinage entre les différentes structures (éléments critiques) dans le processus de percolation.

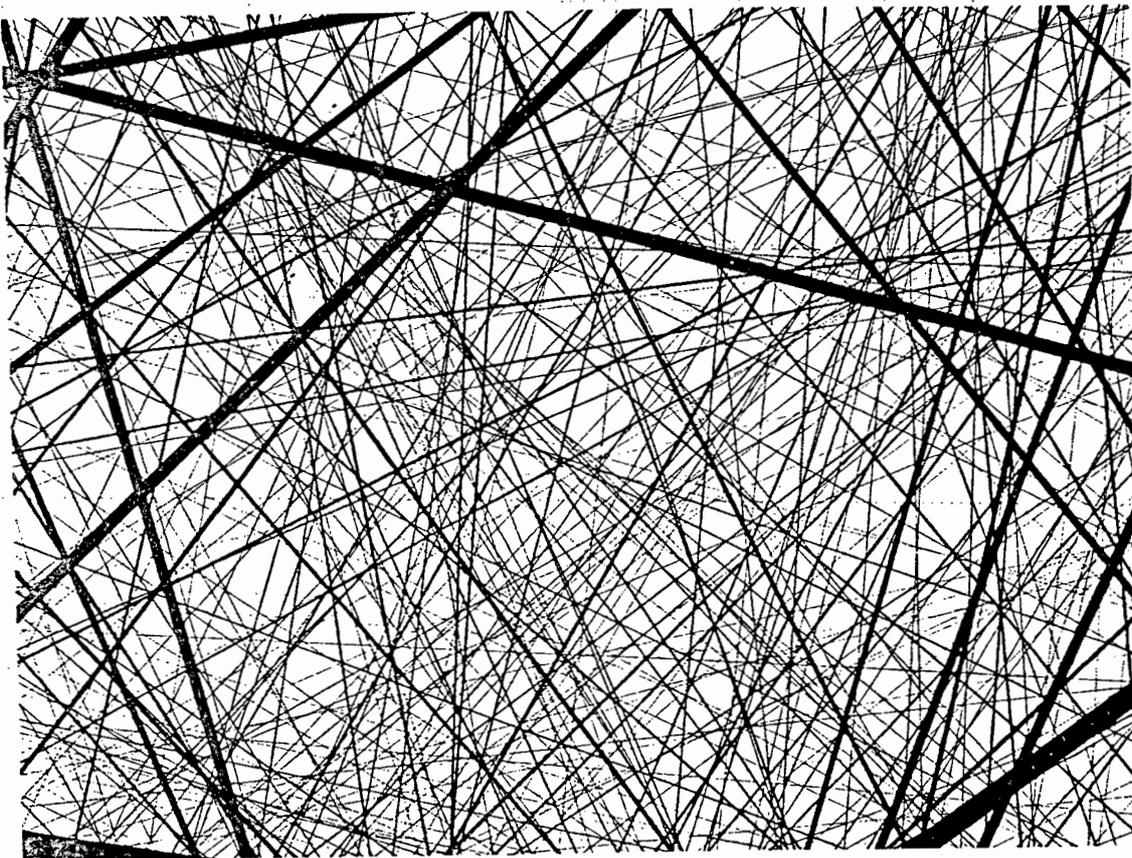
C'est ici, que le variogramme pourrait donner des indicatrices.

Traiter aussi d'autres objets fractals par cette méthode (droites poissonniennes par exemple). La possibilité d'application dans la caractérisation d'agglomérats, problèmes de diffusion,...

Enfin, il semblerait intéressante de commencer à travailler, au moins d'un point de vue théorique, le cas 3D (Trois dimension) et sur une étude topologique. On n'oublie pas l'étude fréquentielle.



Figure(V.12) Apollonian Gasket.



Figure(V.14).- Droites Poissonniennes.

On remercie M. J. C. Pineda C. aussi bien pour la discussion de cette étude que pour les apports à la suite du travail.

[9] TEROL I. "Analyse Morphologique de Poudres par des Modèles Probabilistes". Thèse de Doctorat en Morphologie Mathématique. Sept. 1993. Centre de Morphologie Mathématique. Ecole Supérieure de Mines de Paris.

VI.- REFERENCES.

[1].- SERRA J. "Images Analysis and Mathematical Morphology", 1982 Vol.I , Academic. Press.

[2].- SERRA J. "Images Analysis and Mathematical Morphology", 1988 Vol. II , Academic. Press.

[3].- MANDELBROT B. "FRACTALS. FORM, CHANCE AND DIMENSION", 1977, W.H. FREEMAN AND COMPANY. San Francisco.

[4].- RAMSTEIN G. "Structures Spatiales Irregulieres dans les Images Télédetectio". Thèse de Doctorat de L'Université Louis Pasteur", 13 sep. 1989.

[5] MEYER F., BEUCHER S. "Morphological Segmentation", Journal of Visual Communication and Image Representation, Vol. 1. No.1, sep 1990, pp. 21-46.

[6] MATHERON G. "Random Sets and Integral Geometry", Wiley, New York, 1975.

[7] JEULIN D. "Modèles Morphologiques de Structures Aléatoires et de Changement d'Echelle". Thèse Docteur d'Etat. Université de Caen. avril 1991.

[8] Clerc J.P. et all. "The electrical conductivity of binary disordered systems, percolation clusters, fractals and related models". Advances in Physics, 1990, Vol.39, No.3, 191-309.