

ANALISIS DE IMAGENES Y MORFOLOGIA MATEMATICA.
DESCRIPCION DE LAS HERRAMIENTAS BASICAS



Ivan Terol Villalobos.

(Primera Versión)

**CENTRO DE INVESTIGACION Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
EN ELECTROQUÍMICA DEL ESTADO DE QUERÉTARO. C I D E T E Q**

6 de Abril de 1994

INDICE:

0.- RESUMEN.

I.- INTRODUCCION.

II.- MORFOLOGIA BOOLEANA. LATICES BOOLEANOS.

III.- TRANSFORMACIONES DE BASE. EROSION Y DILATACION MORFOLOGICAS. CERRADURA Y APERTURA MORFOLOGICA. ELEMENTOS EXTREMOS Y GRANULOMETRIA.

IV.- OPERADORES DE CONTRASTE.

V.- FILTROS ALTERNADOS SECUENCIALES, FILTRO AUTOMEDIANO, SUP FILTRO e INF FILTRO.

VI.- TRANSFORMACIONES POR RECONSTRUCCION, GEODESICAS Y CONDICIONALES. ADELGAZAMIENTOS Y ENGROZAMIENTOS.

VII.-ESQUELETO POR BOLAS MAXIMAS O MORFOLOGICO.

VIII.- MARCADORES Y LINEA DE SEPARACION DE AGUAS (WATERSHED), EL PRINCIPIO DE SEGMENTACION DE IMAGENES Y CAMBIO DE HOMOTOPIA. (PARADIGMA DE BEUCHER).

IX.- HACIA UN CONJUNTO DE TRANSFORMACIONES MAS ELABORADAS.

X.- REFERENCIAS.

0.- RESUMEN.

En un primer reporte desarrollado sobre un conjunto básico de programas de Morfología Matemática se presentó de manera general las herramientas realizadas, así como otras por realizar (DESARROLLO DE UN SOFTWARE DE ANALISIS DE IMAGENES MEDIANTE TRANSFORMACIONES MORFOLOGICAS 14 de Julio de 1993). Este segundo reporte tiene como objetivos 3 puntos fundamentales: 1) Dar una consistencia teórica al primer reporte ya desarrollado, 2) Corregir los errores cometidos en el primer reporte, sea por problemas simplemente de escritura, sea por problemas más fuertes de tipo formal, 3) Describir las nuevas transformaciones implementadas y mejorar la descripción de las realizadas en un primer reporte. Debido a todos estos cambios, decidimos igualmente cambiar el título del reporte inicialmente dado.

I.- INTRODUCCION.

La Morfología Matemática (M.M.) es una técnica de Análisis de Imágenes del tipo conjuntista. Dicha técnica nació en los años 60's propuesta por G. MATHERON y J. SERRA. Fue desarrollada por todo un conjunto de investigadores en la ahora llamada Escuela de Fontainebleau (Centro de Morfología Matemática de la Escuela Nacional Superior de Minas de Paris) [1],[2].

Desde un punto de vista más estricto, deberíamos catalogar a la M.M. como una metodología para la caracterización y representación de fenómenos físicos. En efecto, dicha teoría nació bajo estudios realizados sobre la porosidad, que llevó a formalizar dichos trabajos a partir de Conjuntos Aleatorios Cerrados. Después, por otro lado, a concebir modelos teóricos basados en sus inicios en el modelo booleano y por otra parte a la concepción de nuevas transformaciones morfológicas y a su formalización. Dada la potencialidad de esta herramienta, en estos momentos sus áreas de aplicación son numerosas; Ciencias de Materiales, Imágenes Médicas, Análisis de Escenas, Teledetección, Filtraje no-lineal, Industria Aglomeraria, Geostadística, ...

Los principios de base de la M. M. para la modelización del mundo visual es por un lado el principio de inclusión, que sustituye al principio de aditividad que rige en el mundo sonoro y por otra parte la idempotencia de las transformaciones. El primero confiere a las transformaciones la propiedad de irreversibilidad. Todo lo contrario que ocurre en el mundo sonoro, donde dos señales f y g se adicionan ($f + g$) y pueden ser separadas fácilmente ($f + g$) - $g = f$ (reversibles). Un segundo principio concierne la idempotencia de las transformaciones, llamados filtros morfológicos, en M. M.

$$\Psi \circ \Psi = \Psi$$

Este último principio provee de una estructura de semigrupo (o Monoides) a ciertas transformaciones. Aunque esta teoría es completamente general (sobre todo lattice) en este trabajo nos proponemos trabajar en el marco de la Morfología Booleana.

Hablar de todo el conjunto de transformaciones en M.M. está fuera de este contexto. Desarrollaremos una parte importante de esta teoría la cual será implementada en un software [3].

En M.M. las transformaciones de base (no consideradas filtros morfológicos) son la Dilatación y la Erosión. Es a partir de estas dos transformaciones elementales que podremos construir todo un edificio de transformaciones más complejas. Las estructuras de datos y los procedimientos (algoritmos) a implementar dependerán fuertemente del tipo de

transformación. Sin embargo, una gran cantidad de transformaciones complejas serán construidas a partir de primitivas básicas.

II.- MORFOLOGIA BOOLEANA. LATICES BOOLEANOS.
(referencia [2],[4]).

Definición II.1.- Un lattice completo T es un conjunto parcialmente ordenado tal que para toda familia $(X_i)_{i \in I}$ de elementos de T admite:

1) Una cota superior dada por: $\bigvee_{i \in I} X_i$

2) Una cota inferior dada por: $\bigwedge_{i \in I} X_i$

Esto implica la existencia de un elemento universal "E" y un elemento nulo \emptyset :

$$\forall X \in T, \emptyset \leq X \leq E$$

Definición II.2.- Una aplicación δ (resp. ε) de T sobre T es una dilatación (resp. una erosión) ssi la aplicación conmuta con el SUP (resp. INF):

$$\delta(\bigvee X_i) = \bigvee \delta(X_i) \quad \varepsilon(\bigwedge X_i) = \bigwedge \varepsilon(X_i) \quad X_i \in T \quad \dots\dots\dots(II.1)$$

con $\delta(\emptyset) = \emptyset$ y $\varepsilon(E) = E$

Proposición II.3.- A cada dilatación δ sobre el lattice completo corresponde una única erosión ε dada por:

$$\varepsilon(X) = \bigvee \{B \in T, \delta(B) \leq X\} \quad \dots\dots\dots(II.2)$$

y a cada erosión ε corresponde una única dilatación δ :

$$\delta(X) = \bigwedge \{B \in T, \varepsilon(B) \geq X\} \quad \dots\dots\dots(II.3)$$

La proposición precedente, describe entre erosiones y dilataciones, una relación de dualidad (diferente de la dualidad por complementación de la cual hablaremos más tarde). Se trata de una dualidad en el sentido de dos latices completos isomorfos que constituyen la clase de dilataciones y de erosiones sobre T. Dicha dualidad se describe por:

$$\delta(X) \leq Y \Leftrightarrow X \leq \varepsilon(Y) \quad X, Y \in T \quad \dots\dots\dots(II.4)$$

Definición II.4.- Un lattice completo T el cual es igualmente:

(i) Distributivo

$$\forall X, Y, Z \in T, \begin{cases} X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\ X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \end{cases}$$

(ii) Complementado

$$\forall X \in T, \exists Y \in T, \begin{cases} X \wedge Y = \emptyset \\ X \vee Y = E \end{cases}$$

es llamado Lattice Booleano Completo.

En este trabajo nos proponemos entonces trabajar sobre transformaciones binarias sobre un lattice Booleano del tipo $\wp(E)$. siendo el conjunto de todas la partes (conjuntos) del conjunto E. Igualmente en el caso de funciones $f: E \rightarrow T$, de E sobre un lattice completo T (que llamaremos T^E . Más específicamente en nuestro caso $\wp(R^2)$ caso Euclideano (aunque en la realidad (imágenes digitales se aplicará sobre $\wp(Z^2)$). En caso de funciones (imágenes en niveles de gris) será el conjunto de aplicaciones de R^2 sobre \bar{R} , provisto de la relación de orden:

$$\forall f, g \in \wp(R^2), f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in R^2, f(x) \leq g(x)$$

En los latices Booleanos, la complementación $X \rightarrow X^c$ induce una dualidad que produce una correspondencia entre un mapeo $\Psi: \wp \rightarrow \wp$, y su dual Ψ^* definida como:

$$\Psi^*(X) = [\Psi(X^c)]^c$$

III.- TRANSFORMACIONES DE BASE. EROSION Y DILATACION MORFOLOGICAS. CERRADURA Y APERTURA MORFOLOGICA.(Un punto de vista más Geométrico). ELEMENTOS EXTREMOS Y GRANULOMETRIA.

III.1.- Erosión y Dilatación Morfológica (Función Distancia).

La Erosión y la Dilatación morfológicas son definidas de una manera general a partir de funciones estructurantes:

Proposición III.1.-Sea E un conjunto arbitrario. La relación $\Gamma: E \rightarrow \wp(E)$ es equivalente a una dilatación de $\wp(E)$ definida por la relación:

$$\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x), \quad X \in \wp(E)$$

inversamente, cualquier dilatación de $\varphi(E)$ dentro de el mismo determina una única función estructurante $\Gamma : E \rightarrow \varphi(E)$. Usando proposición II.3. es posible introducir de manera análoga la Erosión.

Caso Binario.

Estas definiciones, bien que generales no nos permiten desarrollar algoritmos simples para su realización en un lenguaje dado. Consideremos un primer caso dado por las imágenes binarias. Bajo estas condiciones es posible simplificar nuestra notación;

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{x \in \check{B}} X_x \quad \text{Dilatación Binaria} \quad \dots\dots\dots(III.1)$$

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus \check{B} = \bigcap_{x \in \check{B}} X_x \quad \text{Erosión Binaria}$$

donde \check{B} es el transpuesto de B con respecto al origen (simétrico). Estas dos transformaciones son iterativas, i.e. el dilatado (resp. erosionado) de tamaño nB (n factor de homotecia), es lo mismo que el dilatado (resp. erosionado) de n veces de X por B.

$$\delta_{nB}(X) = \delta_B(\delta_B(\dots\delta_B(X))) \quad \text{n veces.} \quad \dots\dots\dots(III.2)$$

$$\varepsilon_{nB}(X) = \varepsilon_B(\varepsilon_B(\dots\varepsilon_B(X)))$$

Estas dos transformaciones cumplen un conjunto de propiedades algebraicas. Sin embargo, hablaremos sobre ellas en la próxima sección (referirse a I.1,I.2).

Podemos decir que estas dos transformaciones son crecientes: Para todo conjunto X e Y, tal que $X \subset Y$ tenemos que:

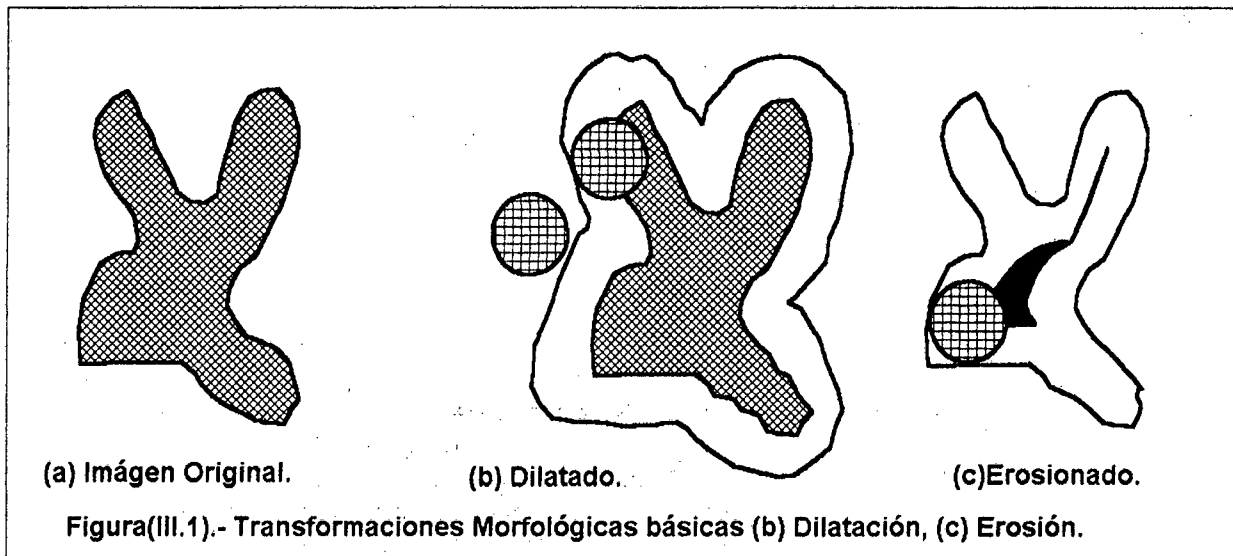
$$\varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y) \quad \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

La Dilatación es una transformación extensiva y la Erosión es anti-extensiva: Para todo X tenemos que:

$$X \subset \delta_B(X) \quad X \supset \varepsilon_B(X)$$

Sin embargo, estas transformaciones no son filtrados morfológicos puesto que no cumplen la propiedad de Idempotencia.

De un punto de vista más geométrico, diremos que la Dilatación de un conjunto X por B (elemento estructurante) es el lugar definido por el complemento del origen x de los trasladados de B cuando dicho conjunto Bx no toca el conjunto X. Mientras que la erosión será definida como el lugar de centros de los trasladados de B (Bx) cuando éste se encuentra completamente al interior de X. La figura (II.1) muestra estas nociones, mientras que en la figura (III.2) mostramos una imagen de granos de café, así como el dilatado y el erosionado de dicha imagen utilizando un elemento estructurante hexagonal de tamaño 4. Se puede observar como estas transformaciones no conservan la conectividad inicial de la imagen. La erosión tiende a eliminar las componenetes conectadas más pequeñas que el hexágono de tamaño "4". Mientras que la dilatación conecta componentes que estaban aisladas y en el caso de existir hoyos dentro de las partículas individuales de tamaño más pequeño que el hexágono de tamaño "4" los eliminará.



Definición III.1.1: Función Distancia.

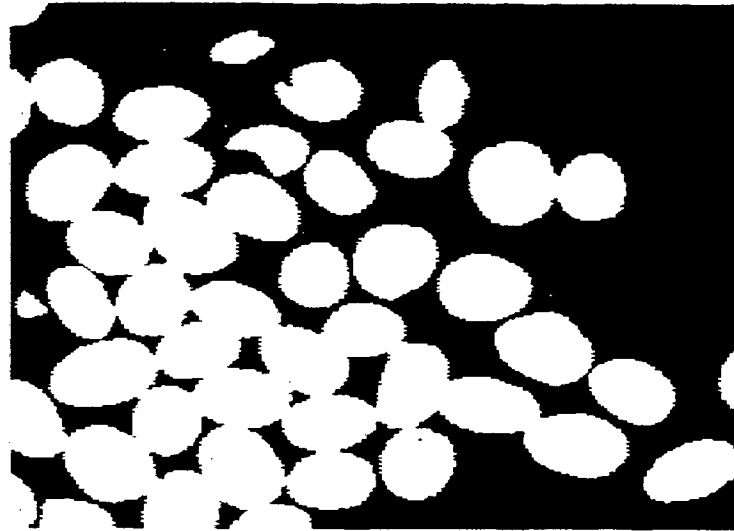
Pareciera que esta parte saliera completamente del contexto del capítulo aquí tratado. Sin embargo, la función distancia es una transformación Morfológica que sintetiza toda la información contenida dentro de los erosionados sucesivos de un conjunto dado (y por dualidad también puede sintetizar la de los dilatados). Esta función llamada "función distancia" y escrita ρ_G está definida para un conjunto G abierto por;

$$\rho_G(x) = d(x, G^c)$$

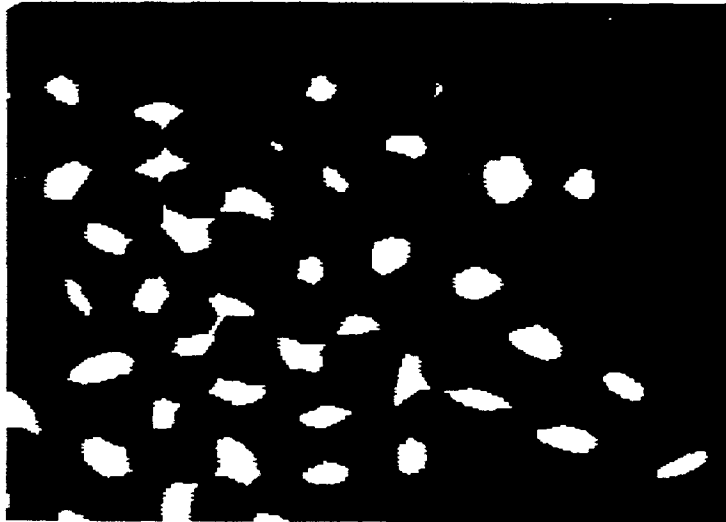
(la distancia de x a G^c , la cerradura topológica del complemento de \bar{G}). Esta función es verdadera en el caso digital:

$$\rho_X(x) = d_B(x, X^c)$$

donde B puede verse de dos maneras; 1) El tipo de trama utilizada (Hexagonal, Cuadrada, Euclídeana,...), o 2) como el tipo de elemento estructurante utilizado (Hexagono, Cuadrado,



(a) Imagen Original.



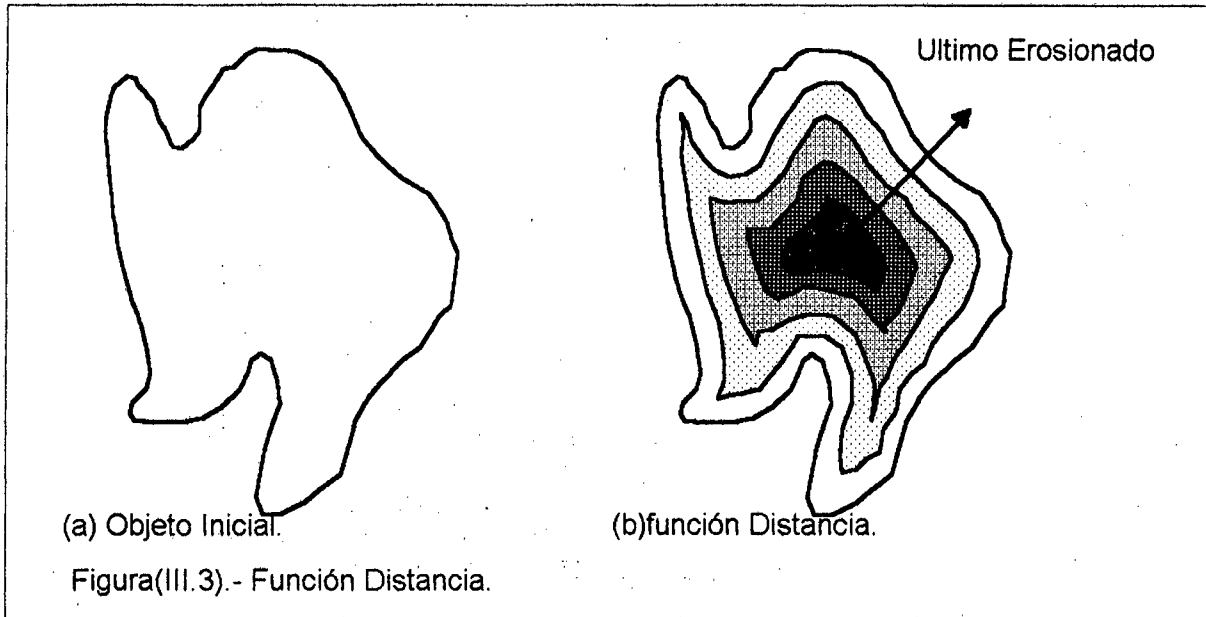
(b) Erosionado.



(c) Dilatado.

Figura (III.2).- Transformaciones básicas en M.M. (b)Erosión y (c)Dilatación.

Disco,...). En otras palabras, el conjunto de puntos para los cuales $\rho_X(x) > n$ es la erosión de X por B de tamaño "n". Un conjunto enorme de transformaciones pueden ser obtenidas a partir de esta transformación. Algo interesante que se puede decir, es que esta transformación tiene dos características muy importantes 1) Comprime la información (por ejemplo, 255 erosiones sucesivas pueden ser almacenados en 8 bits), y, 2) Aumenta la velocidad de tratamiento (una erosión numérica sobre 8 bits equivale a 255 dilataciones binarias). La figura (III.3) muestra esta transformación.



Caso de Niveles de Gris.

Las mismas propiedades y observaciones pueden realizarse en el caso de imágenes en niveles de gris intercambiando la unión por el sup \vee (intersección por el inf). Reportaremos algunas definiciones y propiedades.

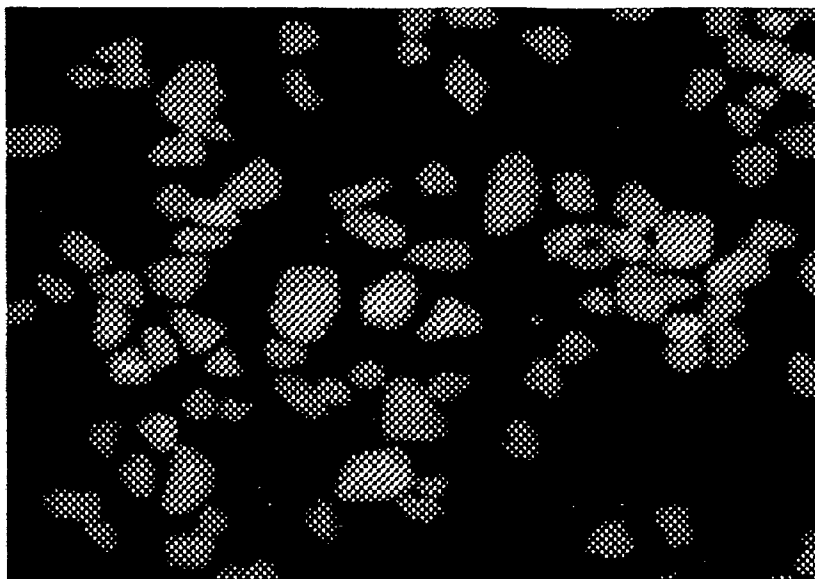
$$\delta_B(f(x)) = \vee \{f(x-y) : y \in B\}$$

$$\varepsilon_B(f(x)) = \wedge \{f(x-y) : y \in B\}$$

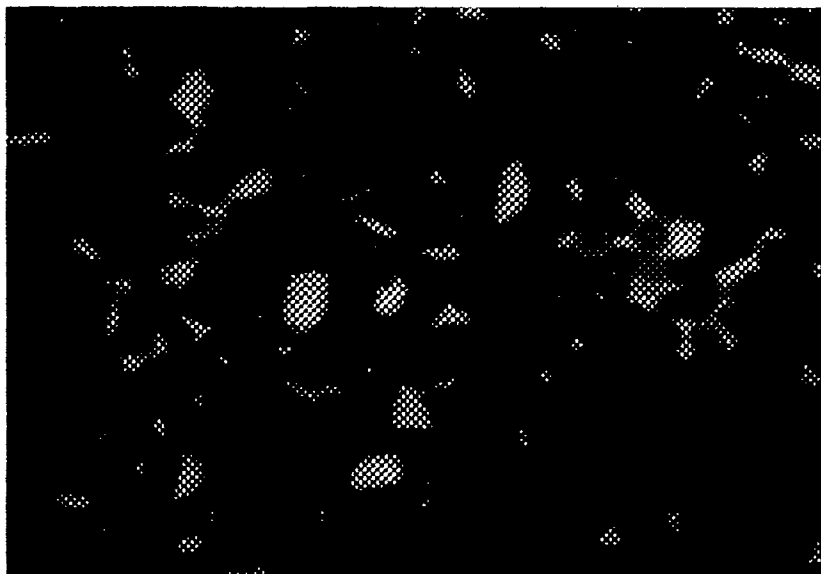
.....(III.3)

Podemos decir que la dilatación (resp. erosión) sobre funciones es extensiva (resp. anti-extensiva), creciente, pero no idempotente. Versiones algorítmicas para el caso de una trama cuadrada y elementos estructurantes cuadrados pueden ser extendidas del caso binario. La figura (III.4) ilustra estas transformaciones.

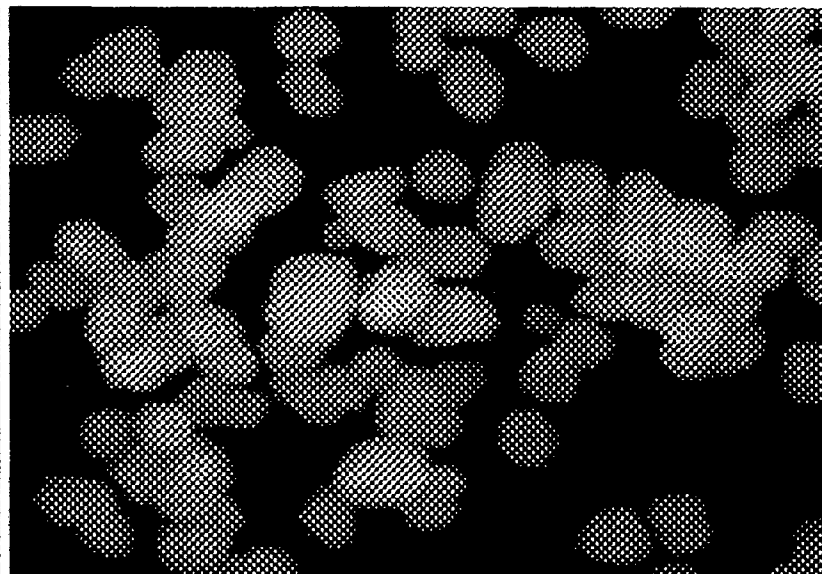
Sub-Grafo y "Sobre-Grafo".



(a) Imágen Numérica de Granos de Sal.



(b) Erosionado de (a) por un Hexágono de tamaño 4.



(b) Dilatado de (a) por un Hexágono de tamaño 4.

Figura(III.4).- Tranformaciones básicas en M.M. (caso Numérico).

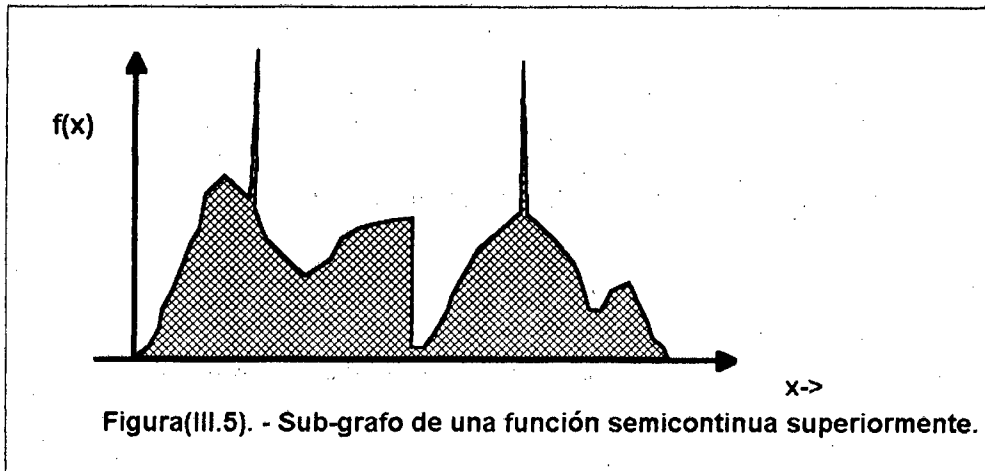
Todos los conceptos anteriores fueron dados para el caso de conjuntos, lo que concierne específicamente al caso binario. Es posible extender estos conceptos al caso de imágenes numéricas (funciones). Es en efecto la noción de sub-grafo permite ligar las funciones y los conjuntos cerrados. Dada una función "f", el conjunto;

$$SG(f) = \{(x, t) : f(x) \leq t, \text{ con } t \in \bar{R}\}$$

es por definición el sub-grafo de "f". Si la función es semicontinua superiormente, el conjunto SG(f) es cerrado. Inversamente, si "f" es semicontinua inferiormente el "sobre-grafo" de "f" definido por;

$$SrG(f) = \{(x, t) : f(x) \geq t, \text{ con } t \in \bar{R}\}$$

es un conjunto cerrado. En la figura [III.5], se muestra el sub-grafo y el sobre-grafo de una función "f". Las definiciones de la M.M. que se aplican a las imágenes en niveles de gris son las mismas que aquellas de la Morfología Binaria.



Definamos un mapeo Ψ de $\Gamma[R^{n+1}] \rightarrow \Gamma(R^{n+1})$; (cerrados de R^{n+1} como invariante (o conmutando con) al seccionamiento por (plano perpendicular al eje "vertical") $\Pi_t (-\infty \leq t \leq \infty)$ cuando para toda función semicontinua superiormente "f" sobre R^n tenemos;

$$\Psi[X_t(f)] = \Psi(f) \cap \Pi_t = X_t[\Psi(f)]$$

En otras palabras, $\Psi(f)$ puede ser construido nivel por nivel de tal manera que cada nivel es la imagen de Ψ del correspondiente nivel de "f". Esta propiedad tiene las siguientes consecuencias;

Teorema III.1.- Sea el mapeo definido anteriormente. Si Ψ es compatible con el seccionamiento, entonces la clase de conjuntos cerrados contenidos en el hiperplano n-dimensional perpendicular a $0t$ es cerrada bajo Ψ ; Aún más Ψ es compatible con las anamorfosis, es decir;

$$S[\Psi(f)] = \Psi[S(f)]$$

III.2.- Filtros Morfológicos de Base. Apertura y Cerradura Morfológica.

Al inicio de este reporte, mencionamos unas de las propiedades básicas de los filtros en Morfología Matemática llamada Idempotencia. Lamentablemente las transformaciones de base Dilatación y Erosión no cumplen dicha propiedad. Sin embargo, es posible, a partir de estas transformaciones, construir filtros que respeten dicha propiedad. Estas transformaciones son la base de un conjunto de filtros más complejos en el Análisis de Imágenes.

Apertura y Cerradura Morfológicas.

Las definiciones formales de estas transformaciones están dadas, tanto en el caso binario como en el numérico (dada la relación entre funciones y conjuntos consideraremos de un punto de vista general X como conjunto) por:

$$\begin{aligned} \varphi_B(X) &= \varepsilon_B \delta_B(X) = (X \oplus \check{B}) \ominus B \\ \gamma_B(X) &= \delta_B(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(III.4)$$

Intuitivamente diremos que el Cerrado de X por B será el complemento del área barrida por B cuando éste se encuentra completamente al exterior de X. Mientras que el abierto de X por B será el área barrida por B cuando éste se encuentra completamente al interior de X. La figura (III.6) ilustra estas definiciones, mientras que la figura (III.7) muestra sobre una imagen real (granos de café), la Apertura y Cerradura morfológica utilizando un elemento estructurante hexagonal de tamaño "4". Al igual que la Erosión y la Dilatación estas transformaciones no conservan ni la conectividad ni la homotopía de la imagen inicial. La partículas (hoyos resp.) más pequeñas (pequeños) que el elemento estructurante son eliminados por la apertura (cerradura resp.). A diferencia de la Erosión y de la Dilatación, estas transformaciones mantienen más o menos la forma de la componente más grande que el elemento estructurante. Cabe decir, que ni la Apertura ni la Cerradura son transformaciones iterativas.

Las propiedades siguientes son verificadas por estas dos transformaciones

CERRADURA MORFOLOGICA.

APERTURA MORFOLOGICA.

$$X \subset Y \Rightarrow \varphi_B(X) \subset \varphi_B(Y)$$

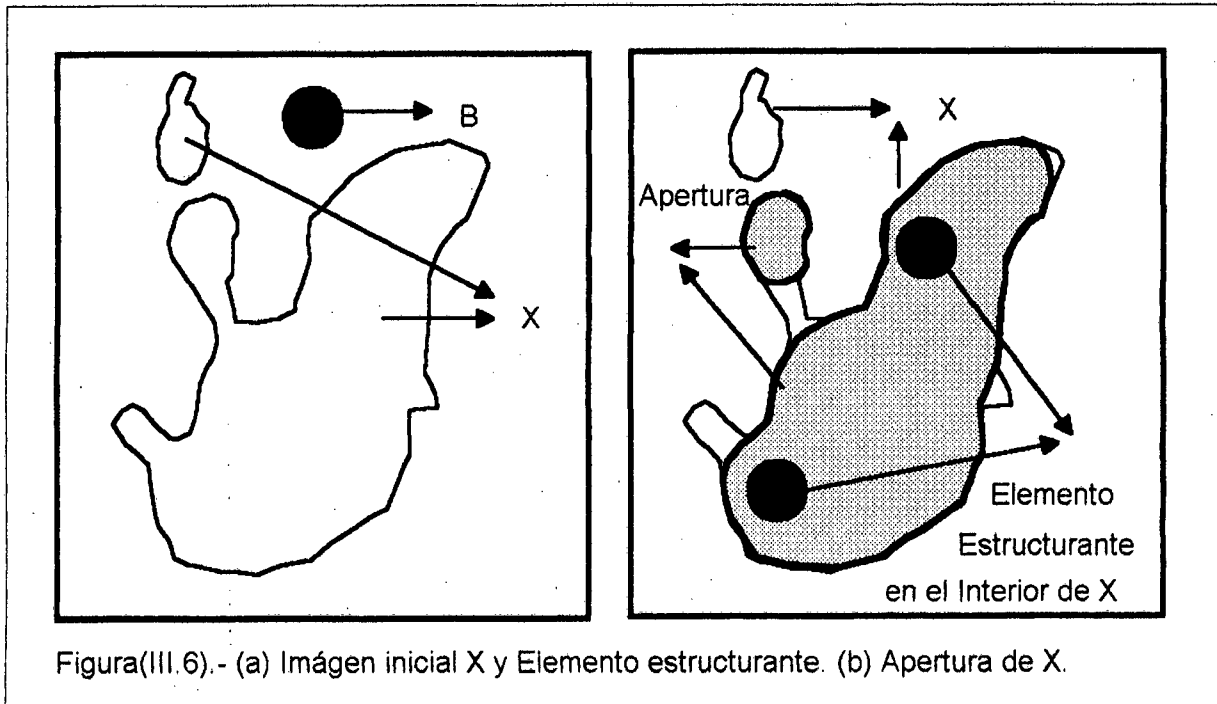
$$\gamma_B(X) \subset \gamma_B(Y)$$

$$X \subset \varphi_B(X)$$

$$X \supset \gamma_B(X)$$

$$\varphi \circ \varphi(X) = \varphi(X)$$

$$\gamma \circ \gamma(X) = \gamma(X)$$



Figura(III.6).- (a) Imágen inicial X y Elemento estructurante. (b) Apertura de X.

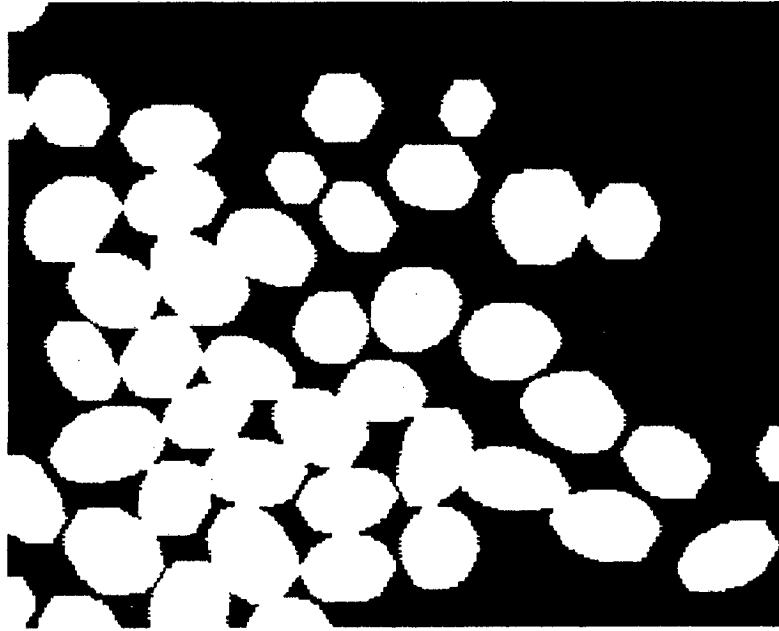
La imágen de una transformación idempotente Ψ se le conoce como la clase invariante de Ψ y se escribe β_Ψ . De esta manera, para todo $M \in \beta_\Psi \subset \emptyset$, $\Psi(M) = M$.

III.3.- Granulometría.

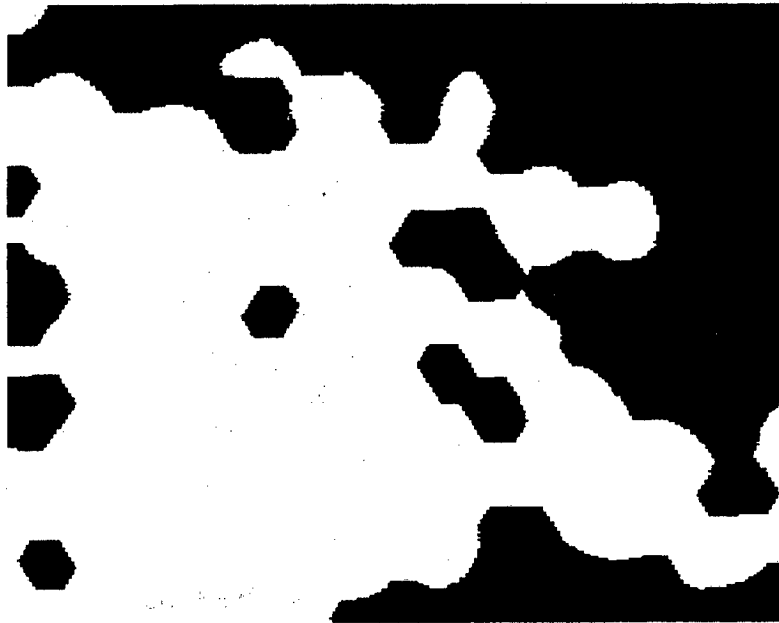
Pudimos observar sobre los ejemplos mostrados que la Apertura Morfológica desaparece las componentes conectadas más pequeñas que el elemento estructurante utilizado. Pareciera posible entonces "tamisar" un conjunto por medio de esta operación utilizando una familia de elementos estructurantes cada vez más grandes. Es en efecto la noción de granulometría que nos permite "tamisar" conjuntos o funciones de la misma manera que uno lo haría físicamente. Un conjunto de Axiomas propuestos por G. Matheron permiten formalizar esta noción.

Definición III.3.1.- Sea $(\Psi_\lambda)_{\lambda \in R^+}$ una familia de transformaciones dependiente de un parámetro único λ positivo. Esta familia constituye una Granulometría ssi verifica las tres propiedades siguientes:

- (i) $\forall \lambda \in R^+$, Ψ_λ es creciente.



(a) Apertura Morfológica de la imagen granos de café.



(b) Cerradura Morfológica de la imagen granos de café.

Figura(III. 7).- Filtros Morfológicos de Base. (a) Apertura y (b) Cerradura.

(ii) $\forall \lambda \in R^+, \Psi_\lambda$ es anti-extensiva

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in R^+, \Psi_\lambda \Psi_\mu = \Psi_\mu \Psi_\lambda = \Psi_{\max(\lambda, \mu)}$

La última propiedad implica la idempotencia. Se puede mostrar que si B (elemento estructurante) es un compacto convexo, la familia de aperturas por homotéticos $(\lambda B)_{\lambda \in R^+}$ de B es una Granulometría. Para la utilización de esta herramienta no es necesario introducir el concepto de partícula. En efecto, a diferencia de operaciones usuales de "tamizado", que no se pueden aplicar en medios continuos, la Granulometría no está asociada a la noción de componente conectada.

Igualmente se puede realizar una Granulometría sobre el complementario X^c de un conjunto X. Esto es lo mismo que realizar Cerraduras (en lugar de Aperturas) sobre X, lo que se conoce como anti-Granulometría. Este tipo de Granulometría permite obtener otro tipo de información de la estructura a analizar. En efecto, la Granulometría nos da información de la distribución de tamaños de partículas, mientras que la Anti-Granulometría nos dará información de la repartición espacial de la estructura.

Con el fin de poder comparar dos medios diferentes (Caso muy común especialmente de Ciencia de los materiales e Imágenes Médicas), se pueden definir las siguientes funcionales;

Función de Distribución Granulométrica $F(\lambda B, X)$ y $F(\lambda B, f(x))$ para el caso de imágenes binarias y funciones respectivamente:

$$F(\lambda B, X) = \frac{\mu_2(X) - \mu_2(\gamma_{\lambda B}(X))}{\mu_2(X)} \quad F(\lambda B, f(x)) = \frac{\int_Z f(x) dx - \int_Z \gamma_{\lambda B}(f(x)) dx}{\int_Z f(x) dx}$$

y la función de Densidad Granulométrica $g(\lambda B, X)$ y $g(\lambda B, f(x))$ definidas por:

$$g(\lambda B, X) = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda B, X) \quad g(\lambda B, f(x)) = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda B, f(x))$$

Muchos casos de aplicación son ya realizados y reportados en las referencias [1],[2],[4].

III.4.- Elementos Extremos.

Cuando se describe un elemento $X \in \mathcal{P}(E)$ por medio de un estudio de su evolución cuando se aplica una familia de transformaciones del tipo Erosión o Apertura \square , es interesante observar la última etapa de la evolución. Damos a continuación dos casos interesantes, los cuales han sido utilizados frecuentemente en aplicaciones reales (principalmente el primero).

Definición III.4.1.- Ultimo Erosionado. Consideremos una familia ε_λ decreciente de parámetro λ positivo, con $\varepsilon_0 = I$ (I siendo la identidad). Consideremos por otra parte la clase de elementos del conjunto potencia $\wp(\lambda_{\max})$ haciendo variar λ entre $[0, \lambda_{\max}]$ y tal que

$$\varepsilon_{\lambda_{\max}} = \emptyset$$

y ε_λ decrece conforme λ aumenta. Llamaremos Ultimo Erosionado de X el conjunto:

$$U_\varepsilon(X) = \varepsilon_\mu(X) : \mu = \text{Sup}\{\lambda : \varepsilon_\lambda(X) \neq \emptyset\}$$

con $X \in \wp(\lambda_{\max})$.

Esta definición tiene un carácter Global más que Local. Daremos otra definición que considera un aspecto Local. Sin embargo, puesto que la introducción de este concepto puede ser mejor entendida después de introducir las transformaciones geodésicas (capítulo VII) dejamos para ese capítulo su presentación. Solo diremos que a diferencia de la relación entre la definición (III.4.1) y el máximo global de la función distancia, en este caso existe una relación con los máximos locales de la función distancia.

Definición III.4.2.-Elementos Críticos de una Granulometría. Vamos asociar a cada Granulometría sus elementos Críticos. Sea el conjunto X . Diremos que es crítico para $\lambda = \lambda_n$ cuando:

$$\lambda < \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset; \lambda > \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(X) = \emptyset \quad \text{y} \quad \lambda_n = \text{Sup}\{\lambda : \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset\}$$

Cuando $\lambda \uparrow \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda \downarrow \gamma_{\lambda_n}$ tenemos $\gamma_{\lambda_n}(X) = \bigwedge \{\gamma_\lambda(X) : \lambda < \lambda_n\} = Mn$ y por idempotencia de la Apertura $\gamma_{\lambda_n}(Mn) = Mn$. Puesto que nosotros sabemos que los invariantes (conjuntos que no cambian después de ser transformados) $B_{\lambda_n} \subset B_\lambda$ para todo $\lambda < \lambda_n$, Mn es invariante para toda Apertura más pequeña que λ_n :

$$\lambda \leq \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(Mn) = Mn \quad \lambda > \lambda_n \Rightarrow \gamma_\lambda(Mn) = \emptyset$$

Al contrario, $\forall Mn \in \wp$ tal que la Apertura $\lambda_{\lambda_{\max}}(Mn) = \emptyset$ corresponde a $\lambda_n \in [0, \lambda_{\max}]$ tal que Mn es crítico para λ_n .

III.5.- TRANSFORMACIONES DE BASE. EROSION Y DILATACION MORFOLOGICAS. CERRADURA Y APERTURA MORFOLOGICA.(Un punto de vista Algebraico).

En las secciones anteriores definimos tanto la Dilatación, la Erosión, la Cerradura y la Apertura morfológicas, dando algunas propiedades básicas de estas transformaciones, así como una

interpretación geométrica de las mismas. En esta parte, intentaremos dar nociones algebraicas de dichas transformaciones (bien que algunas fueron ya mencionadas).

III.5.1.- Propiedades Algebraicas.

Dilatación y Erosión:

La relación siguiente, muestra que la dilatación es conmutativa y asociativa. Bajo esta operación el conjunto $\wp(\mathbb{R}^2)$ tiene una estructura de monoide conmutativa. Mientras que la Erosion tiene es no abeliana.

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{x \in \check{B}} X_x = \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in \check{B}}} X_x = \bigcup_{x \in X} \check{B} \dots\dots\dots(III.5)$$

$$\delta_{\{0\}}(X) = X \oplus \{0\} = X \qquad \delta_{\{x\}}(X) = X \oplus \{x\} = X_x$$

con $\{0\}$ siendo el origen elemento identidad. Para todo $x \in \mathbb{R}^2$; $\delta_{\{x\}}(X), \varepsilon_{\{x\}}(X)$ son los trasladados de X por x . Esto significa que la Dilatación y la Erosion son invariantes bajo translación.

Distributividad.

La Dilatación distribuye la Unión. Entonces podemos escribir:

$$\delta_{(B \cup B')} = \delta_B \cup \delta_{B'}$$

Lo que implica las siguientes relaciones apoyados en la dualidad:

$$\delta_{(B \cup B')} = \delta_B \cup \delta_{B'}$$

$$\varepsilon_B(X \cap Z) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Z) \dots\dots\dots(III.6)$$

$$\varepsilon_{(B \cup B')} = \varepsilon_B \cup \varepsilon_{B'}$$

estas relaciones tienen una implicación tecnológica enorme. Veremos En [3] puede verse su importancia práctica.

Podemos caracterizar fácilmente una familia Ψ_λ dependiente de un parámetro λ positivo generada por dilataciones y compatibles con cambios de escala:

$$\Psi_\lambda(X) = \lambda \Psi \left(\frac{X}{\lambda} \right) = \lambda \left(\delta_B \left(\frac{X}{\lambda} \right) \right) = \delta_{\lambda B}(X)$$

Apertura y Cerradura Morfológica.

De acuerdo con la ecuación (II.4) y tomando la desigualdad;

$$\varepsilon(Y) < \varepsilon(Y) \Rightarrow \forall Y \in \wp ; \delta\varepsilon(Y) < Y$$

de la misma manera, tomando en (II.4) ;

$$Y = \delta(X) ; X < \varepsilon\delta(X) \forall X \in \wp$$

Usando los símbolos anteriormente definidos para la Apertura y Cerradura morfológica tenemos que γ, φ son idempotentes. Por ejemplo, $\varepsilon\delta > I \Rightarrow \gamma\gamma = \delta\varepsilon\delta\varepsilon > \delta\varepsilon$, pero γ es anti-extensiva entonces $\gamma\gamma < \gamma$ y de este modo el resultado deseado.

Sabemos que la Apertura y la Cerradura Algebraica son caracterizadas por sus dominios de invarianza. Veremos que pasa en el caso morfológico.

Tenemos que $\gamma = \delta\varepsilon$ y si B es un abierto por γ , i.e. $\gamma(B)=B \Rightarrow B \in \beta_\gamma$ (dominio de invarianza) es del tipo $B = \delta(Z) \forall Z \in \wp$. Inversamente, si Z es un elemento arbitrario de \wp entonces, por extensividad de la Cerradura $\gamma\delta(Z) = \delta\varepsilon\delta(Z) > \gamma(Z)$ y puesto que γ es una apertura $\gamma\delta(Z) < \delta(Z)$.

De este modo, la familia β_γ de conjuntos invariantes de la apertura morfológica es la imagen de $\delta(\wp)$ de \wp bajo δ .

Resumiendo:

Teorema III.5.1.- Los productos $\gamma = \delta\varepsilon$, $\varphi = \varepsilon\delta$, definen respectivamente una Apertura y una Cerradura Morfológica sobre el lattice \wp . La clase de conjuntos invariantes de la primera es la imagen de \wp bajo δ , y para la segunda la imagen de \wp bajo ε .

Esta transformaciones son:

$$\gamma_B(X) \subset X \quad (\varphi_B(X) \supset X) \quad \text{Anti-Extensividad (Extensividad).}$$

$$\forall X \subset Y, \gamma_B(X) \subset \gamma_B(Y) \quad (\varphi_B(X) \supset \varphi_B(Y)) \quad \text{Crecientes.}$$

$$\gamma_B(\gamma_B(X)) = \gamma_B(X) \quad (\varphi_B(\varphi_B(X)) = \varphi_B(X)) \quad \text{Idempotentes.}$$

Teorema III.5.1.- No existe ley de grupo, admitiendo una inversa, que sea idempotente. Sea * la ley de grupo talque;

$$\Psi * \Psi = \Psi \quad \text{y sea } \bar{\Psi} \text{ la inversa de } \Psi, \text{ entonces } \Psi * \bar{\Psi} = I \text{ y } \bar{\Psi} * \Psi = \Psi \Rightarrow \bar{\Psi} = I$$

La propiedad de idempotencia de las transformaciones (filtros morfológicos) no puede proveer a las mismas, de una estructura de grupo.

IV.- OPERADORES DE CONTRASTE.

En diferentes casos prácticos , se requiere definir de una mejor manera regiones de interés de la imagen o mejorar su contraste con respecto a otras componentes (regiones) de las imágenes. La M.M. provee de toda una gama de transformaciones. Describiremos aquí las principales y mencionaremos algunas extensiones a las mismas, cuando se den la noción de transformaciones geodésicas.

Gradiente Morfológico o de Beucher:

El Gradiente Morfológico (o de Beucher 1984) de una función "f" está definido por;

$$grad(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\delta_{Br}(f) - \epsilon_{Br}(f)}{2r} \right) \dots\dots\dots(IV.1)$$

donde Br es una bola de radio "r". Es posible definir dos versiones reducidas del Gradiente Morfológico:

$$grad^+(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\delta_{Br}(f) - f}{r} \right) \qquad grad^-(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{f - \epsilon_{Br}(f)}{r} \right)$$

llamados respectivamente Gradiente Externo y Gradiente Interno. En el caso discreto tenemos:

$$grad(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f)$$

donde f sera definida en Z^2 y sus valores en Z y B un cuadrado, Hexagono, Línea (gradiente direccional),... de tamaño "1" (en principio). Se puede mostrar que este Gradiente Morfológico es igual al módulo del gradiente de "f" (supuesto continuamente diferenciable [6] pagina 47). la figura(IV.1) ilustra esta transformación.

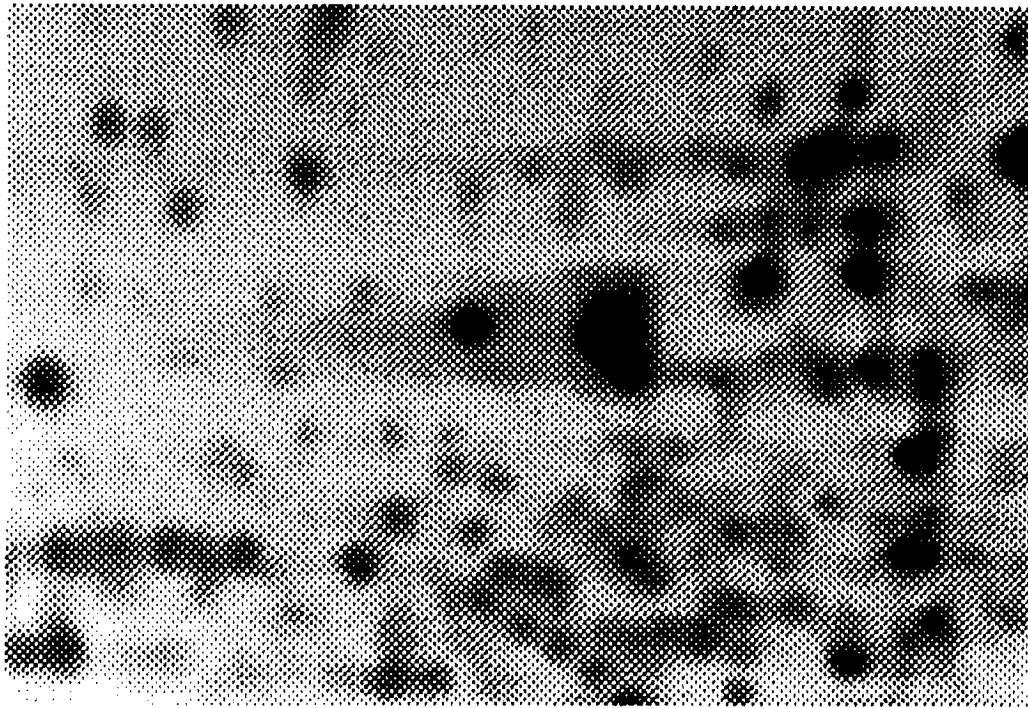
Transformación por TOP-HAT (chapeau de Forme, Sombrero de Copa).

Esta noción fué introducida por F. Meyer (1979) [7] la cual permite detectar picos (resp. Valles) de cierta altura de contraste y de cierto espesor, lo que corresponde a zonas claras (resp. oscuras) y estrechas. Dado un Elementos Estructurante B de tamaño "r" (radio de la base del TOP-HAT), se define de la manera siguiente:

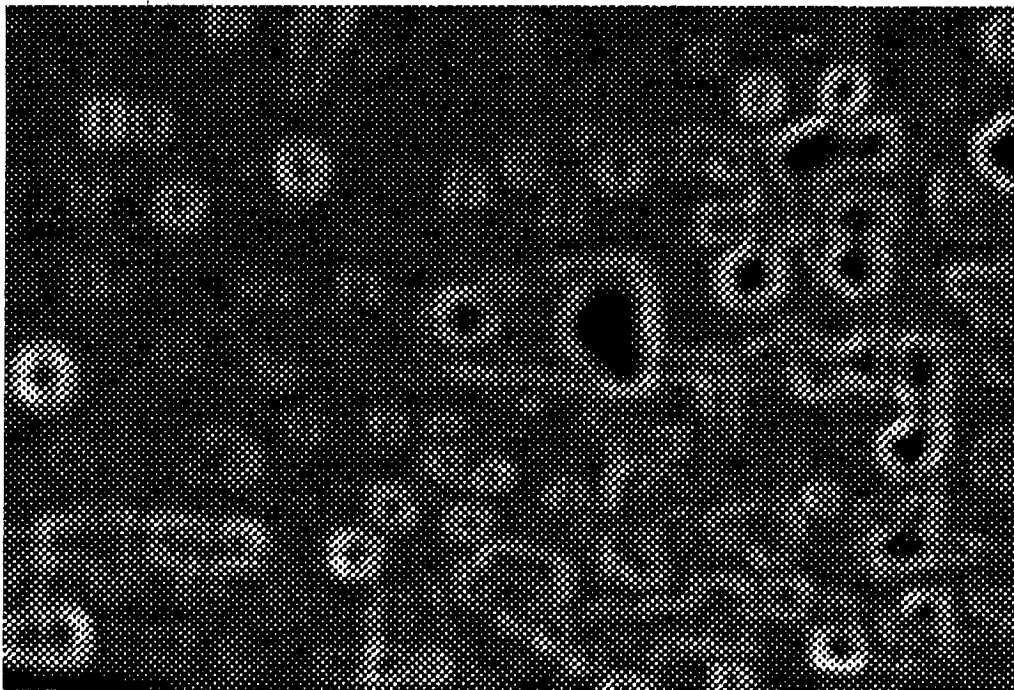
$$HdF_B^\lambda(f) = Um_\lambda(f - \gamma_B(f)), \text{ para detectar zonas claras. } \dots\dots\dots(IV.2)$$

$$\left[\text{resp. } HdF_B^\lambda = Um_\lambda(\varphi_B(f) - f) \right], \text{ para detectar zonas oscuras)$$

donde Um es el umbral calculado a la altura λ como se muestra en la figura (IV.2) el cual puede omitirse permitiendo una selección de regiones por la talla (granulometría) de las regiones de interés. Muy frecuentemente, las regiones extraídas por estas transformaciones son filtradas en función de su contraste por un umbral de los residuos de altura λ , parámetro de contraste o de



(a) Imágen de un Gel de Electroforésis.

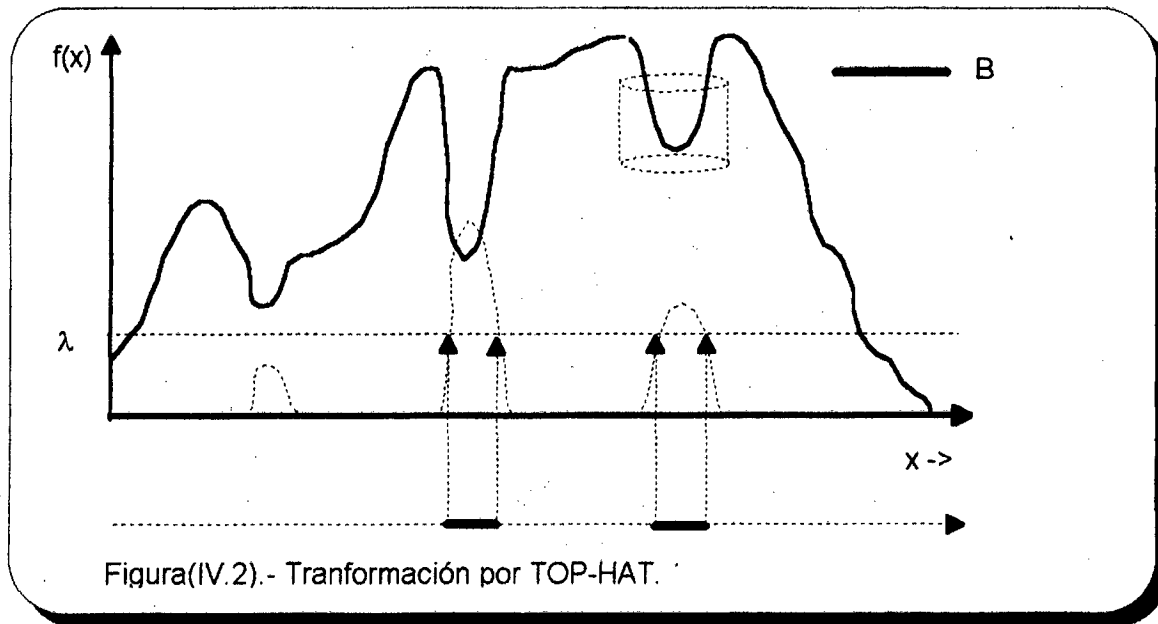


(b) Gradiente Morfológico aplicado sobre (a).

Figura(IV.1).- Gradiente Morfológico o de Beucher.

altura del TOP-HAT. Estas transformaciones tienen, como puede observarse, características granulométricas permitiendo clasificar las regiones de la imagen tanto por tamaño como por altura de las mismas.

En la figura (IV.3) mostramos el TOPHAT sobre una imagen bastante ruidosa y mal contrastada. El objetivo era el de poder detectar el semicírculo que apenas logra verse. En la parte final del trabajo se presenta el procesamiento completo.



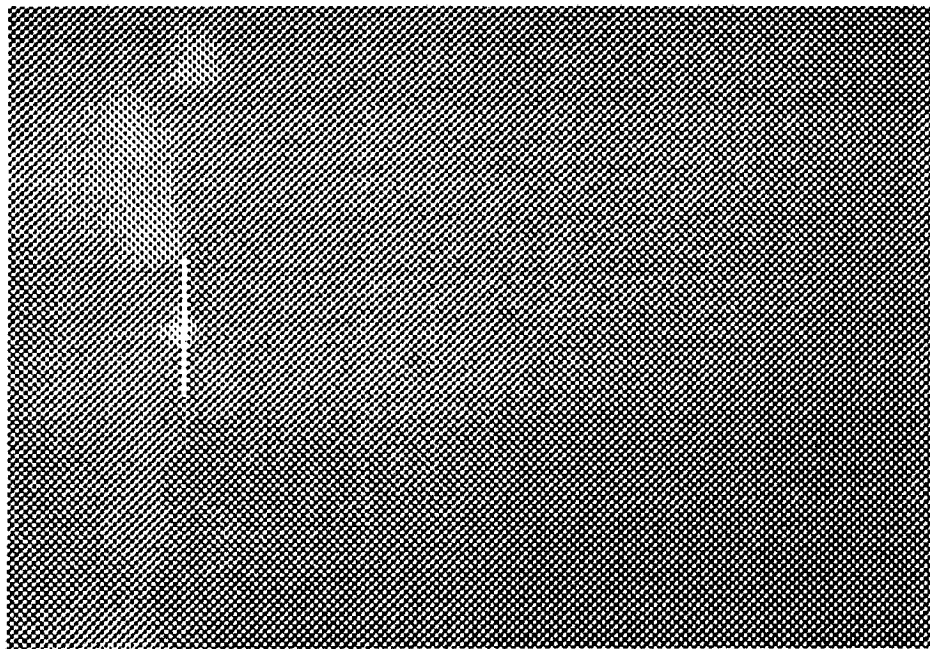
V.- FILTROS ALTERNADOS SECUENCIALES, FILTRO AUTOMEDIANO, SUP-FILTRO y INF-FILTRO.

Filtros Alternados Secuenciales.

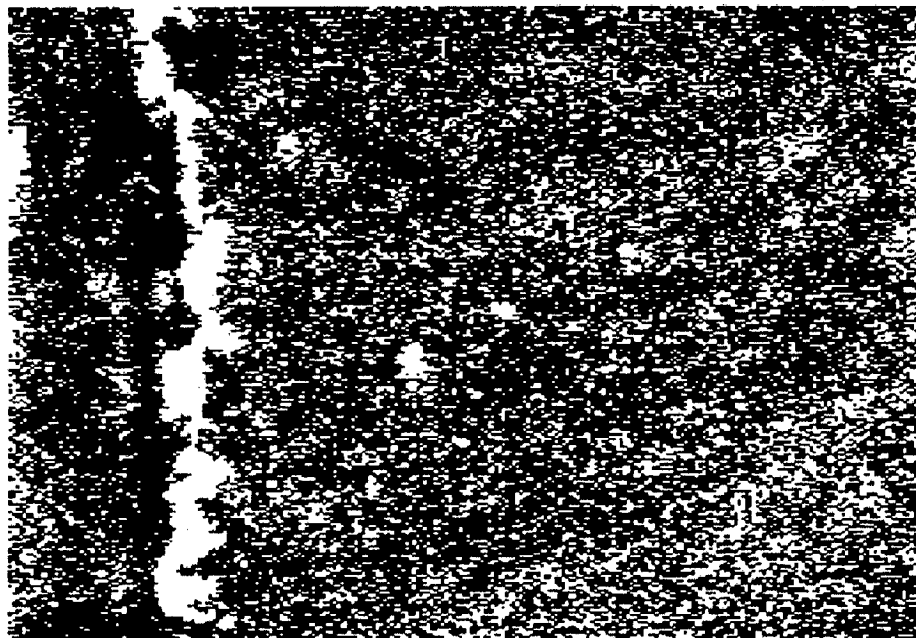
De un punto de vista experimental, estos filtros aparecieron en los inicios de los 80 con los trabajos de Sternberg. Su caracterización fué realizada por J. Serra [2]. Su aplicación consiste en realizar Cerraduras (resp. Aperturas) y Aperturas (resp. Cerraduras) de manera alternada y con un parámetro de homotecia creciente λ (λB siendo el elemento estructurante). La potencialidad de estos filtros se ha mostrado con el tiempo con la resolución de muchos problemas reales en imágenes médicas, de materiales, ... de tal manera que son, en estos momentos, de las herramientas más utilizadas por los MORFOLOGOS para problemas de filtrado y selección de marcadores. Definiremos dos tipos de filtros bajo estos principios, cuya utilización para un problema dado depende claramente de un conocimiento práctico en análisis de imágenes.

$$M_i(X) = \gamma_1 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1(X) \dots \dots \dots (V.1)$$

$$N_i(X) = \varphi_1 \gamma_1 \cdot \dots \cdot \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1(X)$$



(a) Imagen Original. Detección de Semicírculo.



(a) Transformación por TOPHAT

Figura(IV.3).- Transformación por TOPHAT.

donde las familias M_i y N_i consisten de Aperturas y Cerraduras Morfológicas por elementos estructurantes convexos homotéticos. La diferencia entre utilizar, por ejemplo, un filtro $M_i(X)$ (o $N_i(X)$) y un filtrado dado por Aperturas y Cerraduras puede ser muy importante. En efecto, al realizar un filtrado del tipo M_i será menos destructivo que el otro, puesto que al realizar inicialmente un pequeño filtrado del tipo alternado, Apertura - Cerradura permitirá eliminar pequeñas zonas claras y unirá otras estructuras más grandes que se encuentren cercanas. Este criterio de talla y vecindad se irá incrementando paulatinamente hasta realizar la secuencia Apertura - Cerradura de talla "i". Dos observaciones prácticas pueden ser realizadas. Por una parte, la construcción de estos filtros es bastante simple (una vez que se tienen las operaciones Cerradura y Obertura). Por otra parte, si la talla del elemento estructurante (homotecia) es grande, el tiempo de cálculo puede ser igualmente, considerablemente grande (principal inconveniente de estos filtros). En el capítulo (IX) damos una aplicación de este tipo de filtro.

Centro Morfológico y Filtrado Autodual.

La diferencia entre los filtrados por convolución, los cuales son necesariamente auto-duales ($(-f)*g = -(f*g)$, con f y g funciones reales), y los filtros morfológicos, es que estos últimos tratan de una manera diferente la imagen y su complemento. En la práctica, esta selectividad es frecuentemente encontrada; nos permite por ejemplo extraer detalles luminosos sobre regiones oscuras. Sin embargo, podemos fácilmente imaginar otras situaciones en las cuales nos gustaría separar dos componentes, una de las cuales es algunas veces más luminosa y otras veces más oscura que otras regiones. Es el caso cuando queremos eliminar ruido. Nos gustaría entonces usar la auto-dualidad y al mismo tiempo retener las ventajas del filtrado morfológico; independencia con respecto a anamorfosis, no proliferación de tonos de gris, ...

Proposición V.1.- Para un conjunto arbitrario E , sea \wp el lattice completo de aplicaciones crecientes de $\wp(E) \rightarrow \wp(E)$ asociadas con la unión y la intersección en $\wp(E)$. Entonces \wp' es también un inf semilattice completo para la relación de orden α ;

$$\Psi_1, \Psi_2 \in \wp'; \Psi_1 \alpha \Psi_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I \wedge \Psi_1 > I \wedge \Psi_2 \\ I \vee \Psi_1 < I \vee \Psi_2 \end{array} \right\}$$

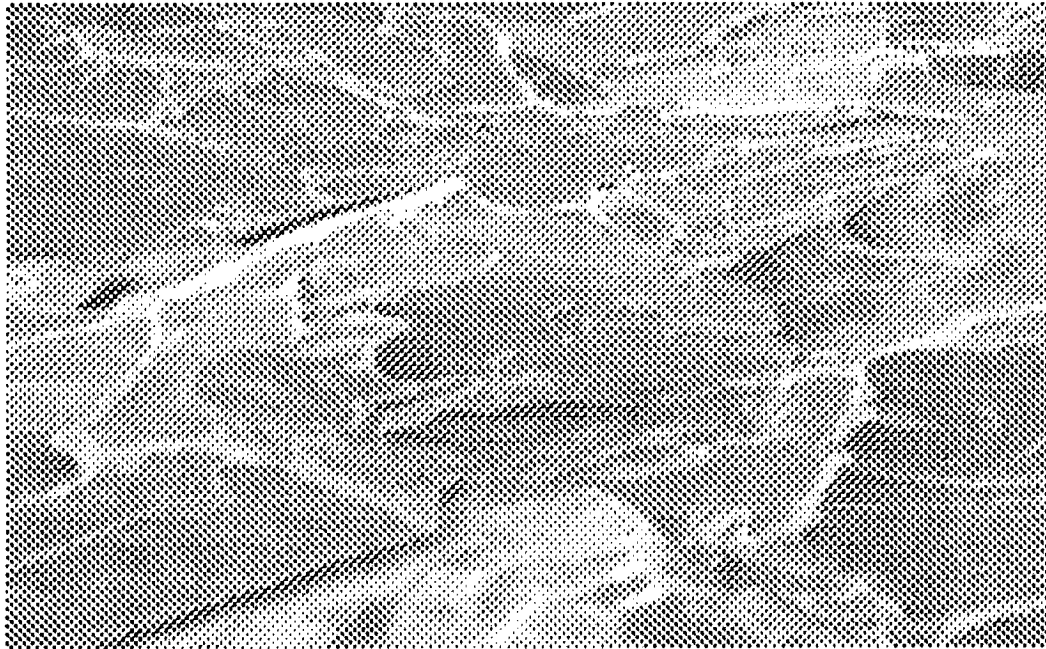
En este semilattice el Inf de una familia $\{\Psi_i\}$ es llamado el centro morfológico de los Ψ_i y se escribe

$$\beta = \wedge \Psi_i = \left| I \wedge \left(\bigvee \Psi_i \right) \right| \vee \left(\bigwedge \Psi_i \right) = \left| I \vee \left(\bigwedge \Psi_i \right) \right| \wedge \left(\bigvee \Psi_i \right)$$

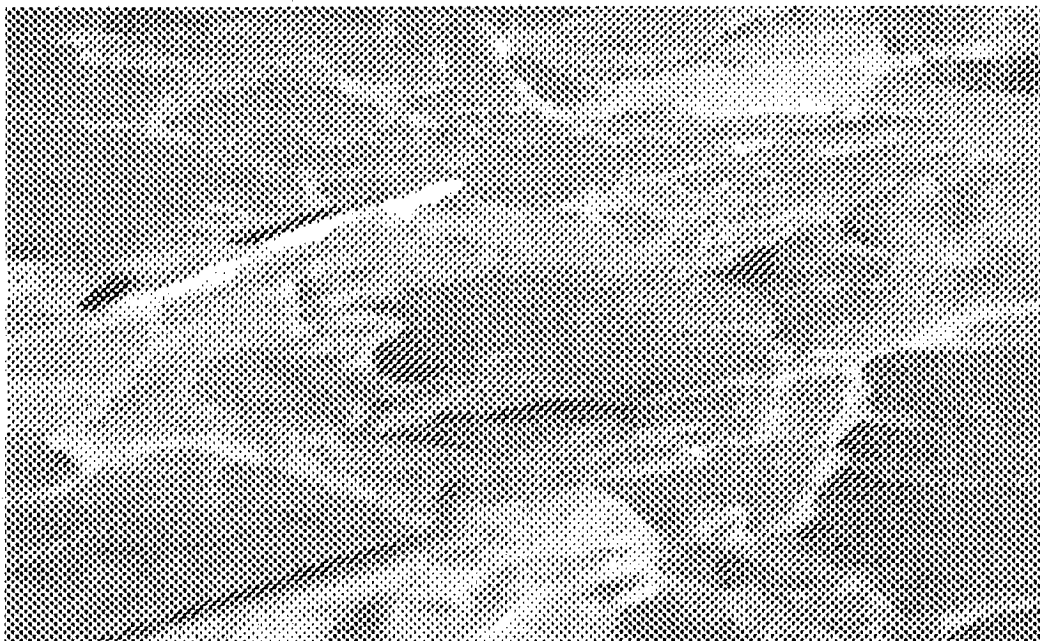
Este tipo de transformaciones son crecientes y con Dualidad [6]. Sus características de filtraje son cercanas al filtrado por mediana con la ventaja de no producir oscilaciones. Los siguientes tres filtros son clásicos en morfología matemática.

$$\beta = (I \wedge \varphi_{BYB} \varphi_B) \vee \gamma_{B\varphi_{BYB}}$$

$$\beta_{\wedge} = (I \wedge \varphi_{BYB} \varphi_B)$$

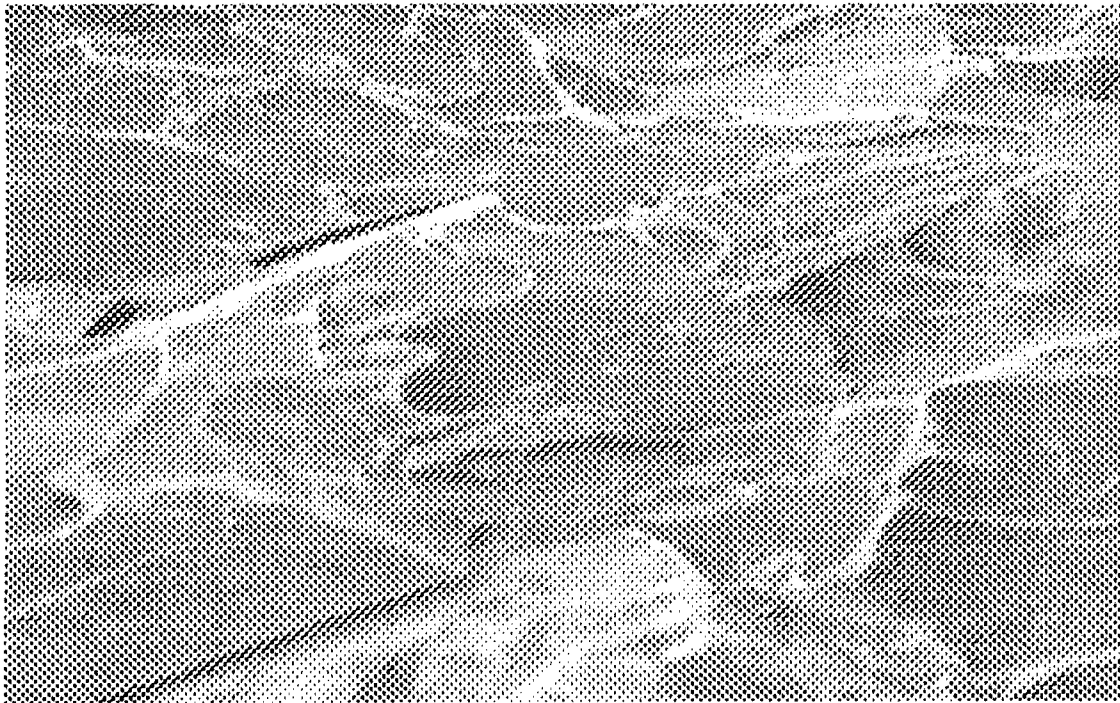


(a) Imágen de la superficie de Fractura.

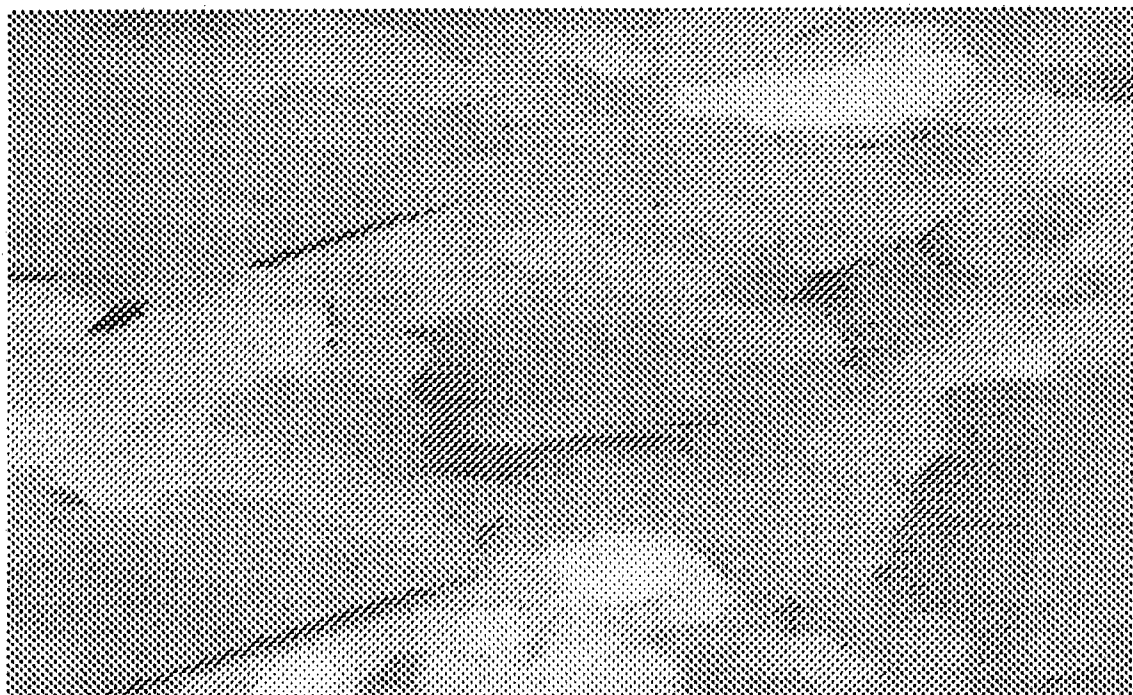


(b) Filtrado Automediano de Tamaño 1 sobre (a).

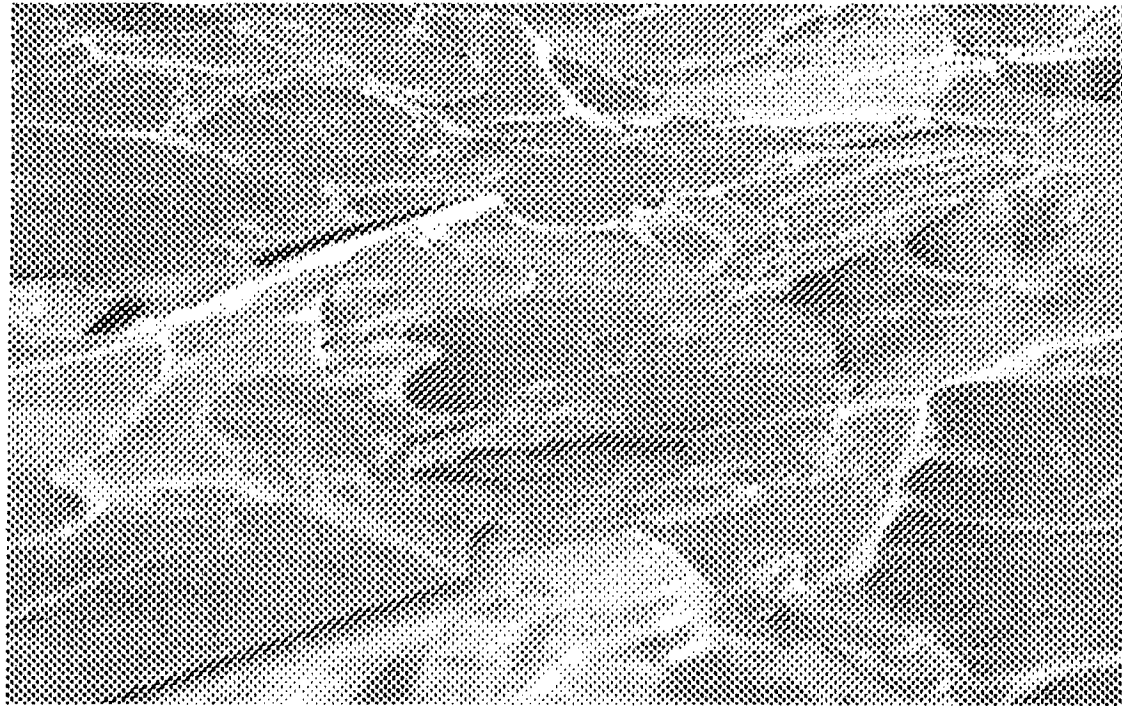
Figura(V.1).- Filtro Automediano (Centro Morfológico).



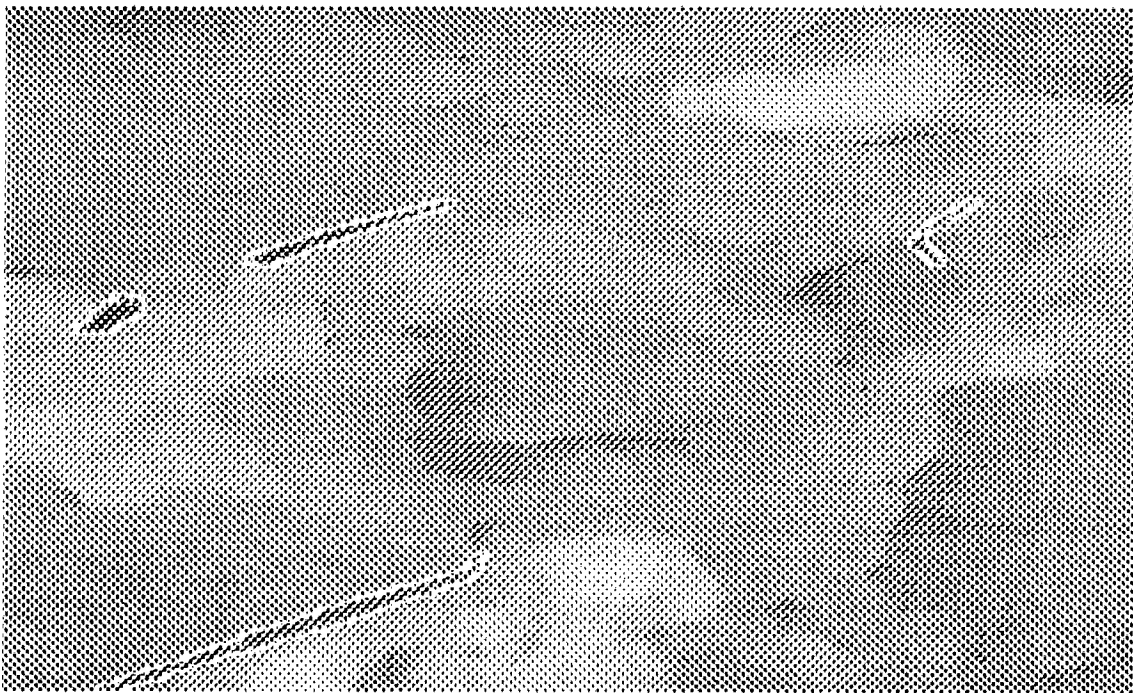
(a). Superficie de Fractura.



(b). Filtrado Morfológico.



(a) Superficie de Fractura.



(b) Detección de Cracks.

Figura (V.3) Detección de defectos sobre la superficie de Fractura.

$$\beta_{\downarrow} = (I \vee \gamma_{B\phi} \vee \gamma_{BYB})$$

En la figura (V.1) se muestra la aplicación de filtrado β para la eliminación de ruido granular, mientras que en la figura (V.2) se muestra la aplicación de β_{\downarrow} utilizado para la eliminación de zonas claras para eliminar su posible interacción cuando se realice un filtrado posterior (figura (V.3)).

VI.- TRANSFORMACIONES POR RECONSTRUCCION, GEODESICAS Y CONDICIONALES. ADELGAZAMIENTOS Y ENGROZAMIENTOS.

Cuando se interesa uno en las operaciones morfológicas ligadas a la conectividad, conviene inicialmente remarcar que se trata de una noción conjuntista, que se debe al primer "Jefe" de la Morfología llamada binaria, o todavía más el conjunto potencia $\phi(E)$ de nuestro espacio de trabajo E Serra et all [8]. Es necesario notar igualmente que es posible orientarse en dos direcciones diferentes et "imcompatibles". La primera se centra sobre las operaciones que preservan la conectividad, la segunda se aplica sobre todo conjunto $X \subset E$ eliminando componentes conectadas de X o X^c . Presentaremos en esta parte las dos vías posibles.

VI.1.-Esqueletos Homotópicos y Transformaciones Condicionales. (Transformaciones de Todo o Nada (Hit and Miss).)

Sea $X \subset R^2$ un conjunto conectado y "x" e "y" dos puntos de X. Consideremos dos caminos diferentes C_1 y C_2 uniendo "x" a "y". C_1 y C_2 son llamados homotópicos ssi es posible pasar de C_1 a C_2 mediante una sucesión continua de transformaciones continuas y reversibles. Por ejemplo en la figura(VI.1) los caminos C_2 y C_3 son homotópicos. Por el contrario C_1 y C_2 no lo son debido al hoyo. Es imposible entonces deformar continuamente C_1 para obtener C_2 . Se muestra que la relación de homotopía entre caminos de X es una relación de equivalencia.

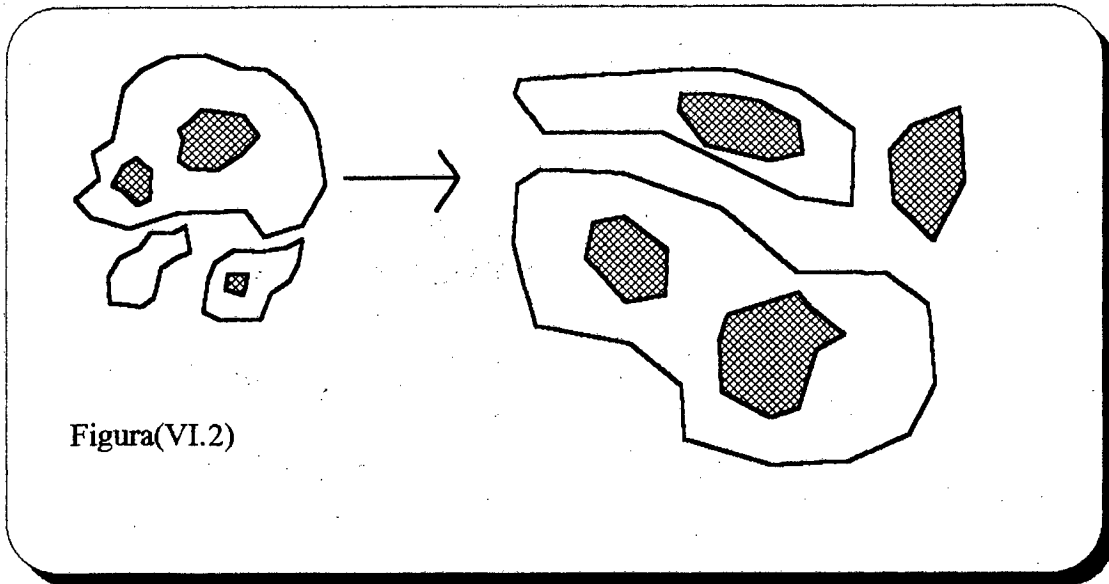
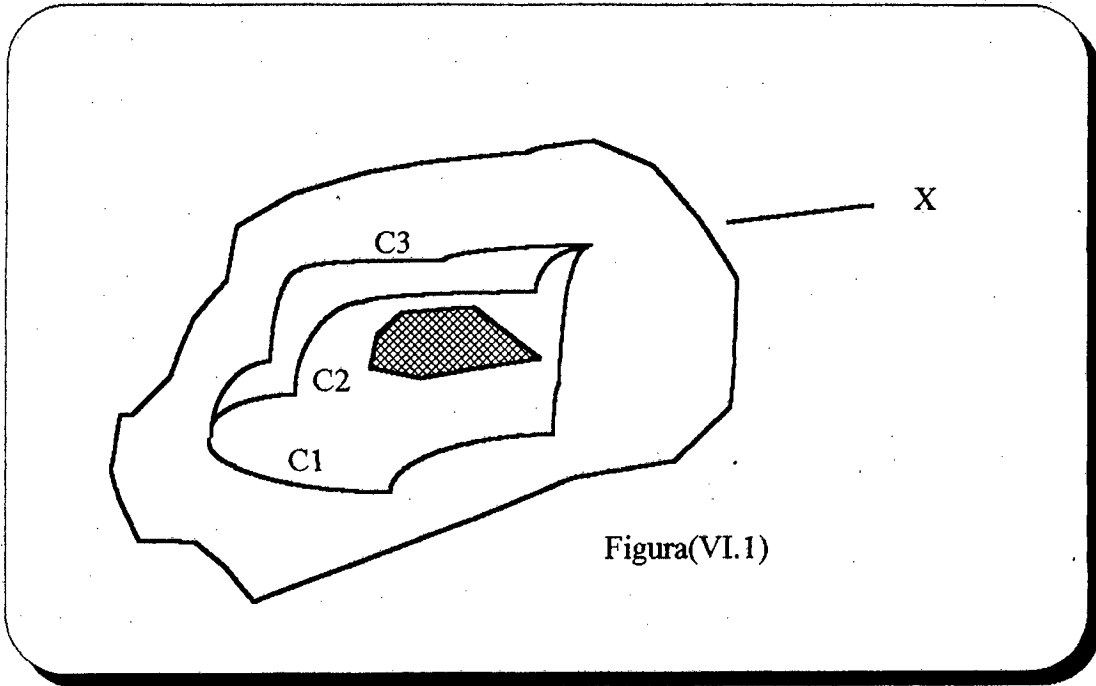
X será llamado simplemente conectado ssi existe una y solamente una clase de equivalencia de caminos entre dos puntos cualesquiera de X. Esto quiere decir que X es conectada y sin hoyos. Una transformación $\Psi : \phi(R^2) \rightarrow \phi(R^2)$ es llamada homotópica ssi

$$\forall X \subset R^2, \exists \theta : R^2 \times [0; 1] \rightarrow R^2, \text{ continua}$$

$$\text{tal que } \begin{cases} \theta(X, 0) = X \\ \theta(X, 1) = \Psi(X) \end{cases}$$

De una manera más intuitiva, diremos que una transformación homotópica es una sucesión continua de deformaciones continuas y reversibles. Así un conjunto simplemente conectado será transformado en un conjunto simplemente conectado; un conjunto con un hoyo, en un conjunto con un hoyo, etc. Más generalmente, si $X \subset R^2$ está compuesto de varias componentes

conectadas $(X_i)_{i \in [1, M]}$, el número y las posiciones relativas de estas X_i serán preservadas para X y X^c (ver figura VI,2).



Transformaciones de Todo o Nada (Hit and Miss).

Sea $B = (B1, B2)$ un elemento estructurante compuesto ($B1$ relativo al objeto y $B2$ relativo al fondo). Se define la transformación en Todo o Nada representado por "*" a partir de la erosión de la manera siguiente;

$$X * B = \varepsilon_{B1}(X) \cap \varepsilon_{B2}(X) \dots\dots\dots(VI.1)$$

Estas transformaciones permiten retener del conjunto X los puntos verificando la configuración dada por $(B1, B2)$. Por otro lado, es importante hacer notar que esta transformación no es, en general, ni creciente, ni idempotente, ni extensiva. Es utilizada especialmente, para definir los adelgazamientos morfológicos y engrosamientos.

Adelgazamiento y Engrosamiento.

Se define el adelgazamiento $X \bullet B$, de X por B :

$$X \bullet B = X / (X * B) \dots\dots\dots(VI.2)$$

y el engrosamiento $X \circ B$, de X por B

$$X \circ B = X \cup (X * B) \dots\dots\dots(VI.3)$$

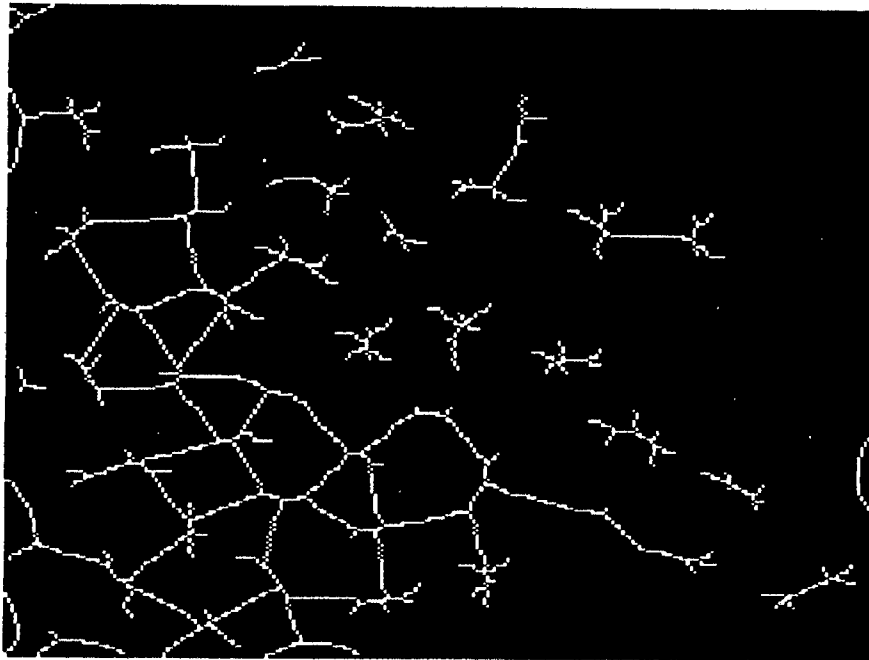
Esqueleto por Adelgazamiento.

El esqueleto por adelgazamiento se obtiene operando un adelgazamiento por B del conjunto X , después iterando esta operación un número de veces dado por el tipo de trama utilizado. Por razones de simplicidad demos el caso de la trama hexagonal y para un elemento estructurante llamado L :

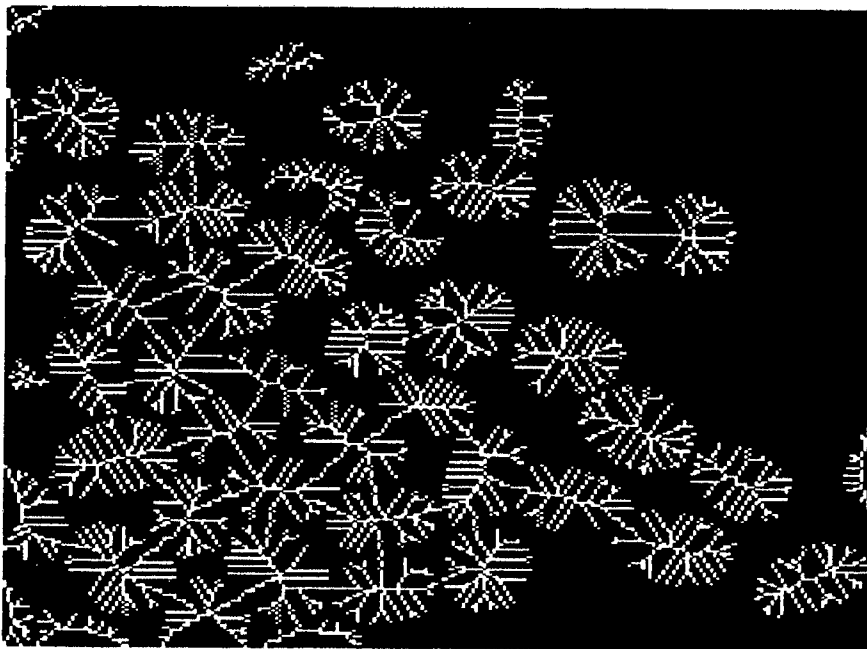
$$L = (L_1, L_2) = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$$

- 0 para el fondo.
- x indiferente.
- 1 para el objeto.

En este caso se realizan 6 operaciones rotando el elemento en $\pi/3$ la secuencia de operaciones es realizada hasta la idempotencia (no existan cambios en las imágenes). Otro elemento estructurante llamado "E" es comunmente utilizado para eliminar los puntos terminales. Su configuración es la siguiente;

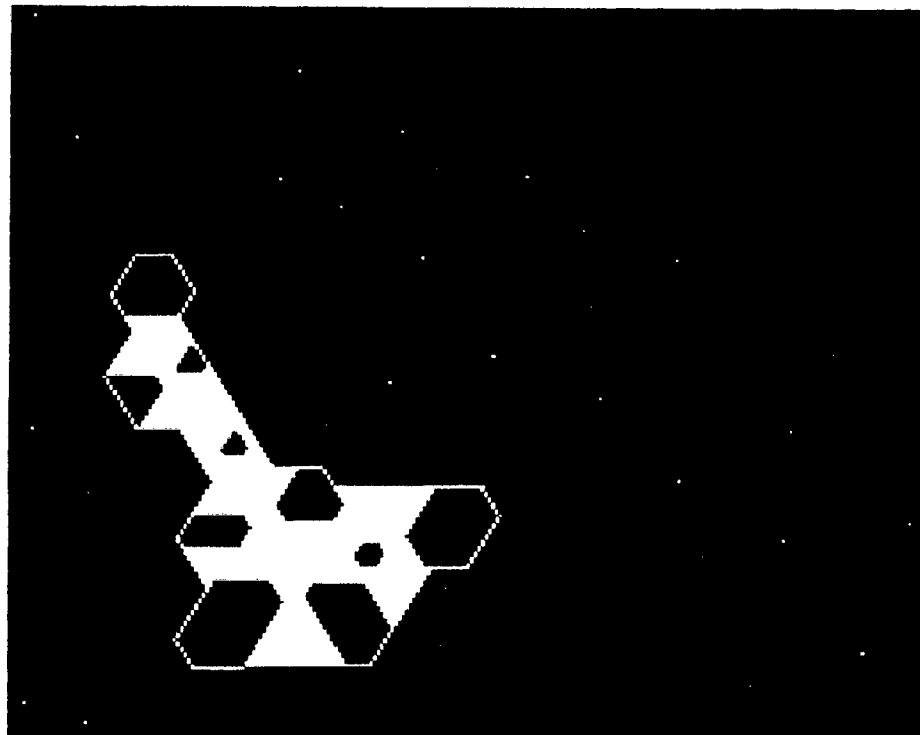


(a) Esqueleto tipo L. (Granos de Café)



(b) Esqueleto tipo M. (granos de Café)

Figura(VI.3).- Esqueletos tipo L y tipo M. (sobre la imagen III.2)



(c)Esqueleto tipo D. (granos de Café)



(d) Puntos terminales del Esqueleto L (a)

$$E = (E_1, E_2) = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Esqueleto por Engrosamiento.

El esqueleto por Engrosamiento es, en lo que se refiere a él, principalmente utilizado para producir el esqueleto por zonas de influencia o SKIZ (en ingles). Es definido en dos dimensiones :

Sea $X \subset R^2$ un conjunto formado de n componentes conectadas $\{X_i; i=1, \dots, n\}$ la zona de influencia $z(X_i)$ de X_i es el conjunto de puntos de R^2 que están más cerca de X_i que de cualquier otra componente $X_j \neq X_i$.

$$Z(X_i) = \{x \in R^2, \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\} \dots\dots\dots(VI.3)$$

esta transformación es obtenida por engrosamientos homotópicos y conservando solamente los arcos cerrados. En la figura (VI.3) y (VI.4) se muestran diferentes transformaciones homotópicas usando diferentes elementos estructurantes (ver [1],[3],[5] para las configuraciones).

Transformaciones Homotópicas Condicionales.

A partir de las transformaciones descritas anteriormente es posible desarrollar un método para cambiar la homotopía de un conjunto dado. Consideremos un conjunto no conectado como el mostrado en la figura (VI.5.b) y llamemosle X_{nc} . Sin entrar en detalles, dicho conjunto fué obtenido a partir de la imágene de la figura (VI.5.a) utilizando la transformación que se llama Bisectriz Condicional. De esta se hablará en el capítulo siguiente por lo cual utilizaremos simplemente X_{nc} . Por otro lado llamaremos Máscara M al conjunto inicial (figura VI.5.a). Utilizaremos dicha máscara M para modificar la homotopía de X_{nc} .

Procederemos de la manera siguiente; a) Se realizarán adelgazamientos sucesivos por el elemento estructurante "L" sobre el conjunto M condicionados por el conjunto X_{nc} . De una manera más precisa, realizaremos la unión después del adelgazamiento de M con el conjunto X_{nc} ;

$$(M \circ L) \cup X_{nc} = M_L^1$$

$$M_L^\infty = [\dots[[[M \circ L] \cup X_{nc}] \circ L] \cup X_{nc} \dots]$$

esta transformación se realiza hasta idempotencia. El mismo procedimiento es realizado utilizando el elemento estructurante "E";

$$[M_L^\infty \circ E] \cup X_{nc} = M$$

$$(M_L^{\infty})_E = [\dots [[[(M_L^{\infty}) \cdot E] \cup X_{nc}] \cdot E] \cup X$$

Se observa sobre las figuras (VI.5.c) y (VI.5.d) que la homotopía del conjunto transformado tiene la misma que M, conservando las regiones dadas por Xnc.

VI.2.- Transformaciones por Reconstrucción (Geodésicas). Operadores Conectados.

Criterio de Conectividad.

Este tipo de transformaciones han tenido un éxito enorme en los últimos años gracias a recientes aportaciones en el C.M.M. tanto del punto de vista de aplicaciones, como del punto de vista teórico y de la algorítmica de las transformaciones. Para su introducción daremos unas definiciones primordiales. La noción de conectividad fué introducida por G. Matheron y J. Serra [2] a partir de la definición siguiente:

Definición VI.2.1.- Sea E un conjunto cualesquiera, y $\wp(E)$ su conjunto potencia asociado. Una clase conectada $\zeta \subseteq \wp(E)$ está definida sobre $\wp(E)$ cuando

- (i) $\emptyset \in \zeta$ y $\forall x \in E, \{x\} \in \zeta$
- (ii) \forall familia $\{C_i\}$ en $\zeta, \bigcap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup C_i \in \zeta$

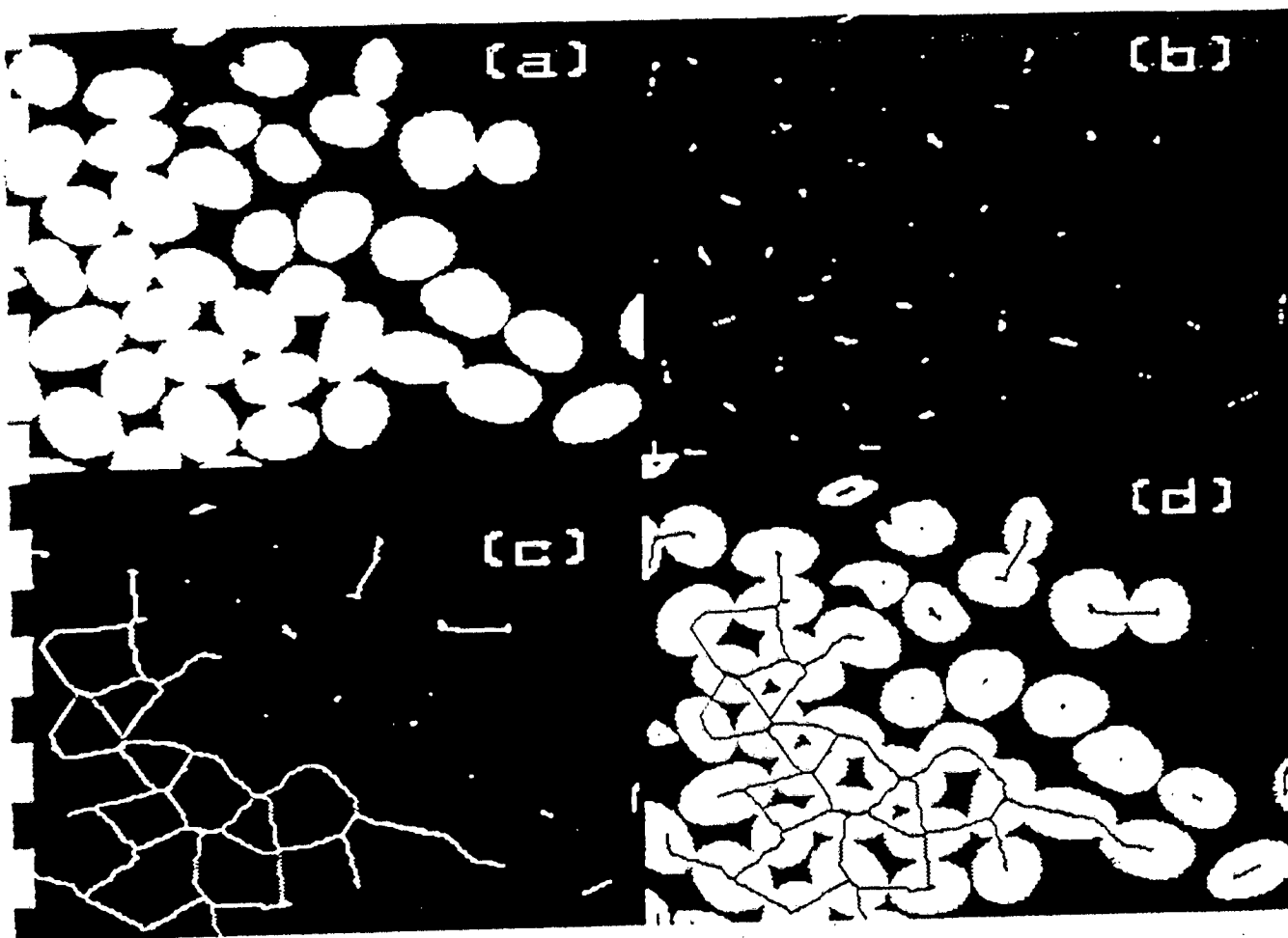
Esta definición conduce a ciertos comentarios:

- a)- Esta definición no está fundada sobre una eventual topología sobre E; es de una caracter puramente algebraico.
- b)- Se dirige a latices booleanos del tipo $\wp(E)$, y los puntos $x \in E$, considerados como elementos del conjunto potencia, juegan sobre el un papel importante.
- c)- La conectividad introduce un orden sobre $\wp(E)$, según la cual B est más pequeño que A cuando todas sus componentes conectadas son también componentes conectadas de A. Este orden permite construir únicamente un Inf- semi latice.

Sea ζ_x una subclase de $C \in \zeta$ que contiene un punto x

$$\zeta_x = \{C : x \in C \subset \zeta\}$$

Entonces, $\forall x \in \wp(E)$



Figura(VI.5).- (a) Imágen Original, (b) Bisectriz Condicional de la imágen (a), (c) Bisectriz condicional conexas (usando transformaciones condicionales para conectarla) usando la imágen original como conjunto X_{nc} , (d) Imágen Original y Bisectriz condicional conexas.

$$\gamma_x(X) = \bigcup \{C : C \in \xi, x \in C \subset X\} \dots\dots\dots(VI.4)$$

Formalizando este resultado;

Teorema VI.2.1.- Una clase conectada dada ξ sobre $\emptyset(E)$ es equivalente a la familia $\{\gamma_x\}$, x pertenece a E de aperturas tales que:

(i) $\forall x \in E, \gamma_x(\{x\}) = \{x\}$

(ii) $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_x(A) = \gamma_y(A)$

(iii) $\forall A \subset E$ y $\forall x \in E$, entonces $x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

La Obertura Conectada, puede ser generalizada al caso $\gamma_Y(X)$ donde Y no es un punto sino un conjunto;

$$\gamma_Y(X) = \bigcup_{x \in Y} \gamma_x = \bigcup_{x \in Y} \left(\bigcup \{C : C \in \xi, x \in C \subset X\} \right) \dots\dots\dots(VI.5)$$

donde $Y = X \Rightarrow \gamma_Y(X) = X$

Es interesante notar que esta transformación es frecuentemente aplicada en análisis de imágenes. Las transformaciones clásicas: a) Eliminación de partículas tocando los bordes; b) El análisis individual (partícula por partícula); c) Análisis de Vecindad, ... son algunos ejemplos para su utilización. Sin embargo, es posible aplicar este tipo de transformaciones en otros problemas tales como el filtrado Morfológico y más interesante en el caso de cambios de homotopía sobre las funciones.

Transformaciones Geodésicas.

Vamos a introducir la noción de transformaciones geodésicas [10]. Para ésto definimos inicialmente la distancia geodésica.

Sea $X \subset R^2$, x e y dos puntos de X ; la distancia geodésica $d(x,y)$ entre x et y esta definida por;

$$d_X(x,y) = \inf \{l(C_{x,y}), C_{x,y} \text{ trayectoria uniendo } x \text{ a } y \text{ dentro de } X\}$$

si x e y no pertenecen a la misma componente conectada X , se tiene por convención, $d_X(x,y) = \infty$.

Sean dos conjuntos X e Y tales que $Y \subset X$. La dilatación y la erosión geodésica de Y condicional a X de tamaño " r " está dada por;

$$\begin{aligned} \varepsilon_X^r(Y) &= \{y \in X; B_X(y, r) \subseteq Y\} = \varepsilon_X^1(\varepsilon_X^1(\dots(\varepsilon_X^1(Y)))) \\ \delta_X^r(Y) &= \{y \in X; B_X(y, r) \cap Y \neq \emptyset\} = \underbrace{\delta_X^1(\delta_X^1(\dots(\delta_X^1(Y))))}_{r \text{ veces}} \end{aligned} \dots\dots\dots(VI.6)$$

donde $B_X(x, r)$ es una bola geodésica definida por;

$$B_X(x, r) = \{y \in X; d_X(x, y) \leq r\}$$

Observamos que la apertura definida anteriormente (eq. VI.5) está construida por una dilatación geodésica;

$$\gamma_Y(X) = \delta_X^\infty(Y) \dots\dots\dots(VI.7)$$

donde el exponente infinito, quiere decir que se dilata hasta la idempotencia. El conjunto Y juega el papel de un marcador. De una manera similar, se extienden estos conceptos al caso numérico.

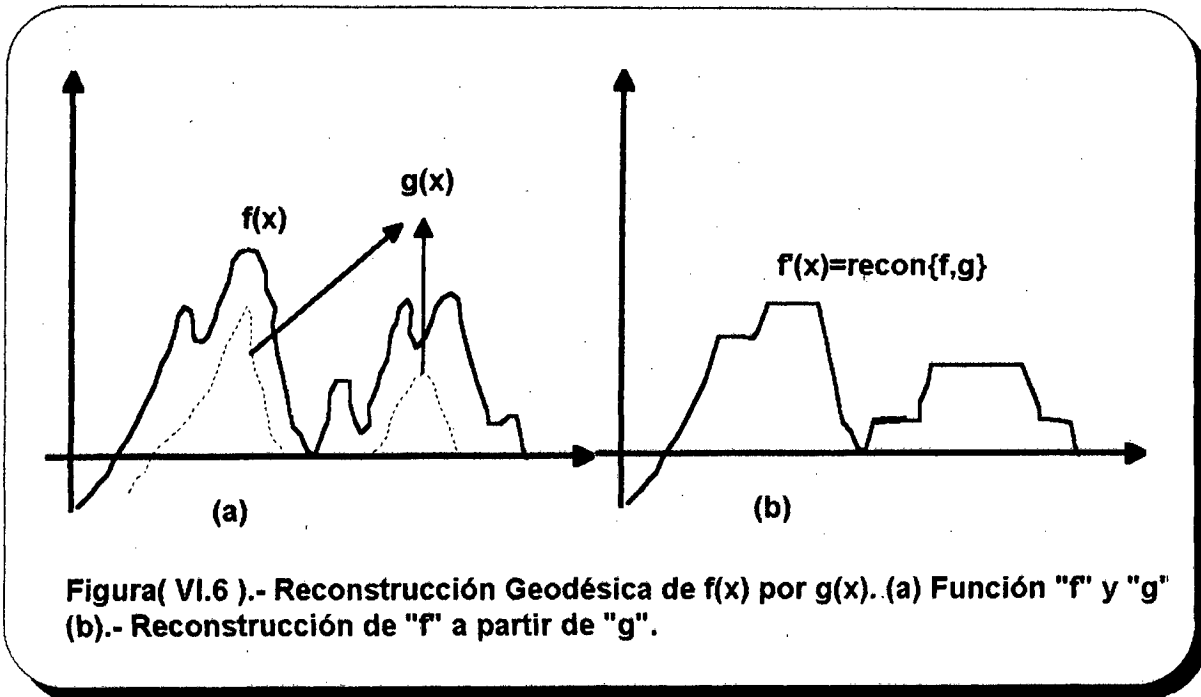
$$\varepsilon_f^1(g) = \inf(\delta_B^1(g), f)$$

$$\delta_f^1(g) = \sup(\varepsilon_B^1(g), f)$$

En este caso, se puede igualmente reconstruir una función "f" mediante una función marcador g. Si $g < f$, se tiene;

$$R_f(g) = \delta_f^\infty(g) \dots\dots\dots(VI.8)$$

en la figure (VI.6) ilustramos esta transformación:



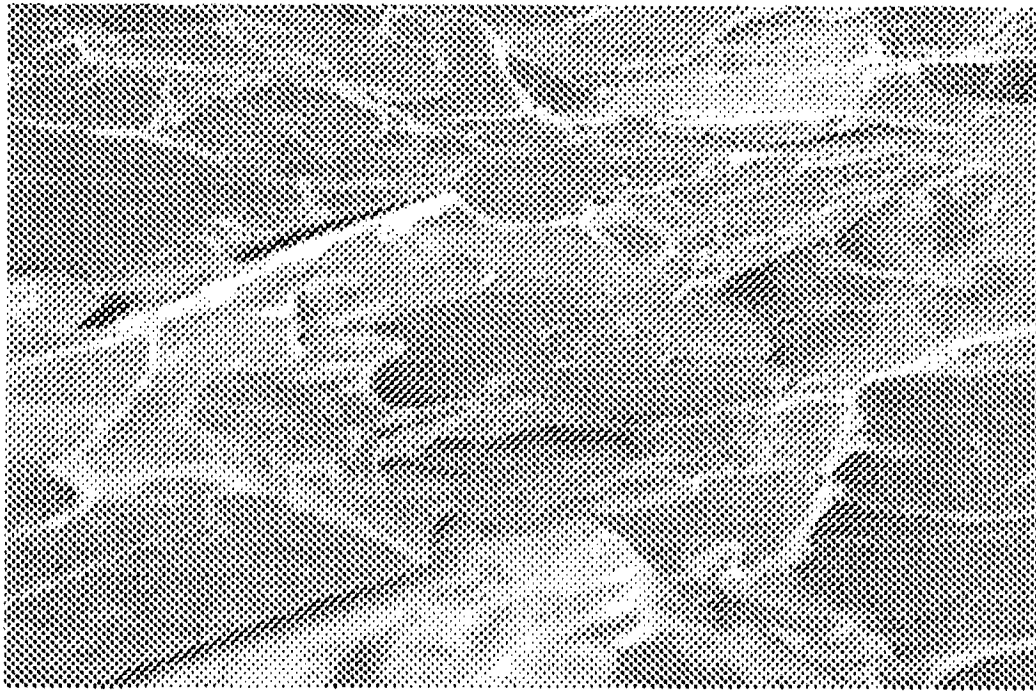
Mientras que en la figura(VI.7) mostramos un caso real de aplicación de este tipo de filtro (imagen de una superficie de fractura).

Operadores Booleanos Conectados.

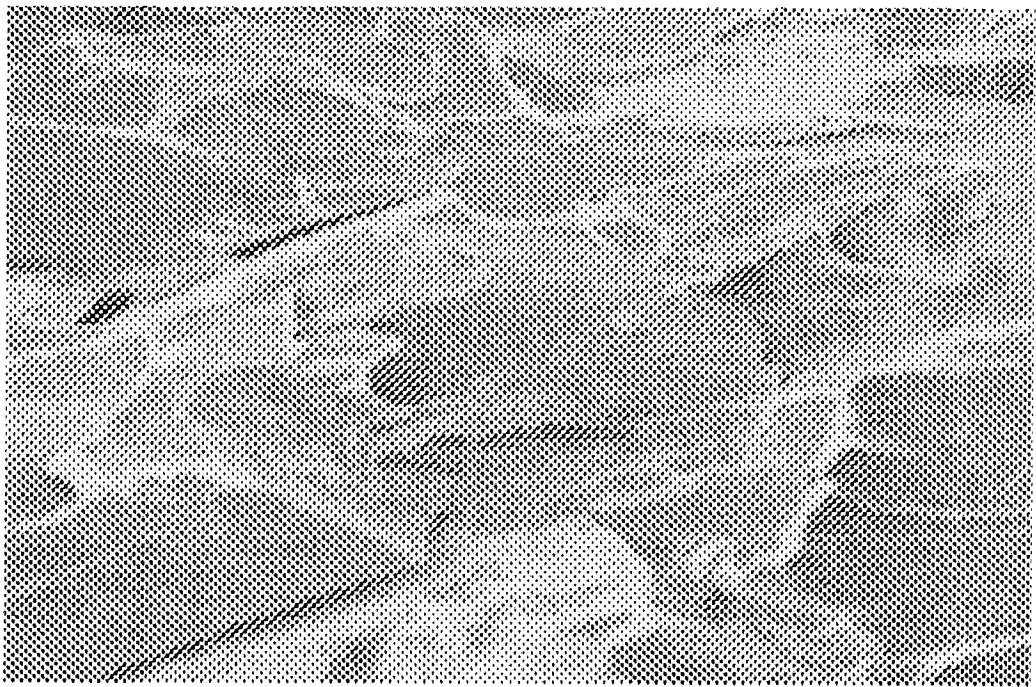
La regla de juego de este tipo de operadores consiste en eliminar o retener componentes conectadas. Consideremos la definición siguiente.

Definición VI.2.2.- Un operador $\Psi : \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ se llama conectado cuando para todo $A \subset E$ la diferencia simétrica entre A y $\Psi(A)$ está exclusivamente constituido por componentes conectadas de A o del complemento de A .

En otras palabras, un operador conectado puede eliminar solamente granos o tapar hoyos. A pesar de su nombre, este operador no preserva ni la conectividad, ni la homotopía. Un ejemplo clasico de este tipo de operadores se presenta cuando deseamos calcular una granulometria mediante técnicas de Segmentación de Imágenes y Análisis Individual de Partículas. En la figura (VI.8) mostramos un ejemplo donde se eliminan las partículas que tocan los bordes de la imagen y se tapan los hoyos de las partículas.

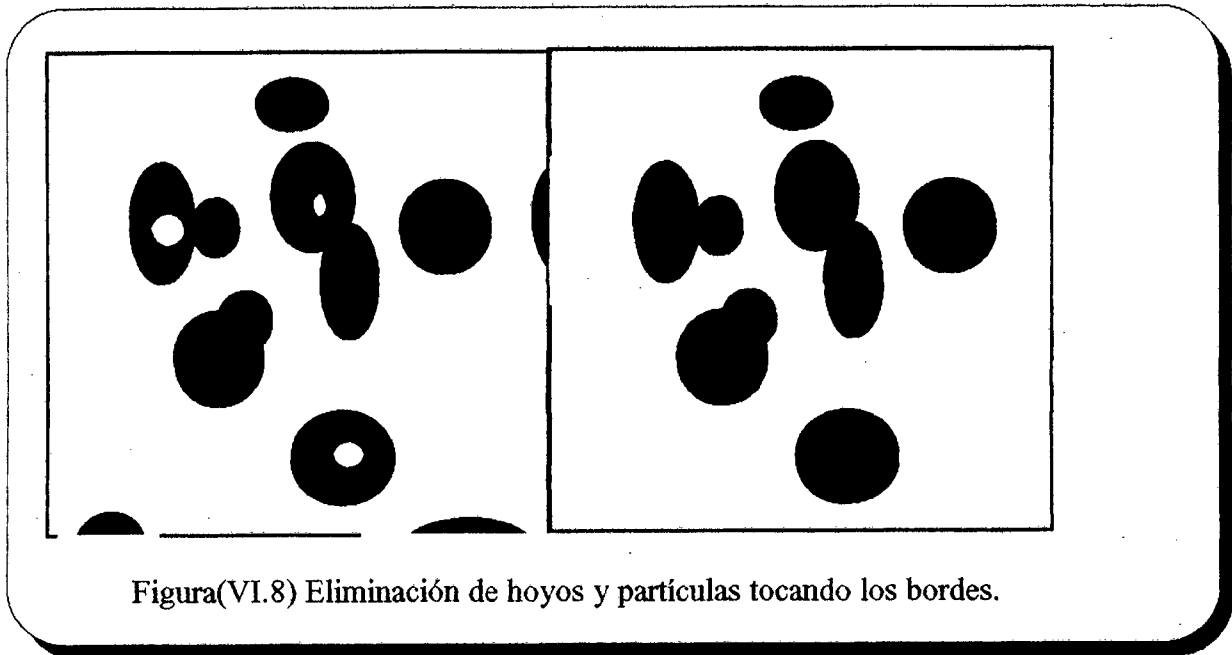


(a) Imágen de la Superficie de Fractura.



(b) Imágen filtrada por reconstrucción (Filtrado Geodésico).

Figura(VI. 7).- Filtrado Geodésico o por Reconstrucción.



Figura(VI.8) Eliminación de hoyos y partículas tocando los bordes.

Proposición VI.2.1.- La clase de operadores conectados es cerrada bajo el Sup, Inf y la composición.

VII.- ESQUELETO DE BOLAS MAXIMAS o MORFOLOGICO.

Hablar de esta transformación ameritaría no solamente el capítulo que se le asigna, sino todo un trabajo sobre este tema y estudios de investigación. Fué BLUM, quien propuso dicha transformación que ha dado lugar ha muchos estudios teóricos y prácticos. El primer investigador, en M.M. que caracterizó dicho esqueleto fué C. Lantuejoul. Después G. Matheron realizó un estudio topológico de es transformación para después ser implementada y entendida correctamente en el caso de imágenes digitales por F. Meyer.

En efecto, el Esqueleto Morfológico (por bolas máximas), es uno de los modelos más interesantes en M.M. Para su descripción usemos el concepto de bolas máximas;

Definición: Una bola B incluida dentro de un conjunto X es llamada máxima ssi no existe otra bola B' de X conteniendola:

$$B; \text{máxima} \Leftrightarrow \forall B' \subset X; B \subset B' \Rightarrow B' = B.$$

Desde un punto de vista de M.M., el Esqueleto morfológico de un conjunto X, escrito Sq(X) es definido como el lugar de centros de sus bolas máximas.

$$Sq(X) = \cup \{x \in X; \exists r \geq 0, B(x, r) \text{ máxima en } X\}$$

De esta manera, el conjunto X está constituido por la unión de bolas máximas B_i :

$$X = \cup B_i$$

Lantuejoul propuso el teorema siguiente para su caracterización un punto de vista de la M.M.:

$$S_q(X) = \cup_{\lambda > 0} \cap_{\mu > 0} \{ \varepsilon_{\lambda B}(X) / \gamma_{\mu B}(\varepsilon_{\lambda B}(X)) \}$$

Una versión más algorítmica está dada por:

$$Sq(X) = \bigcup_{\lambda > 0} \{ \varepsilon_{\lambda B}(X) / \gamma_B(\varepsilon_{\lambda B}(X)) \}$$

donde n_{max} es un entero tal que:

$$\varepsilon_{n_{max} B}(X) \neq \emptyset \text{ y } \varepsilon_{(n_{max}+1) B}(X) = \emptyset.$$

conocido en M.M. como elemento extremo de los erosionados. Esta noción tiene un interés práctico muy interesante. Dirigirse a [1],[2] para más información.

A todo punto del esqueleto se le puede asociar el radio de la bola máxima correspondiente. Se puede definir de esta manera una función llamémosle por el momento de extinción (quench function en inglés y fonction d'étanchéité en francés);

$$q_x \left\{ \begin{array}{l} S(X) \rightarrow R^+ \\ x \rightarrow r, B(x, r) \text{ máxima} \end{array} \right.$$

Propiedades Topológicas:

Para el caso de conjuntos abiertos (de un punto de vista topológico):

*Existe conservación del número de conectividad $N_2(X)$.

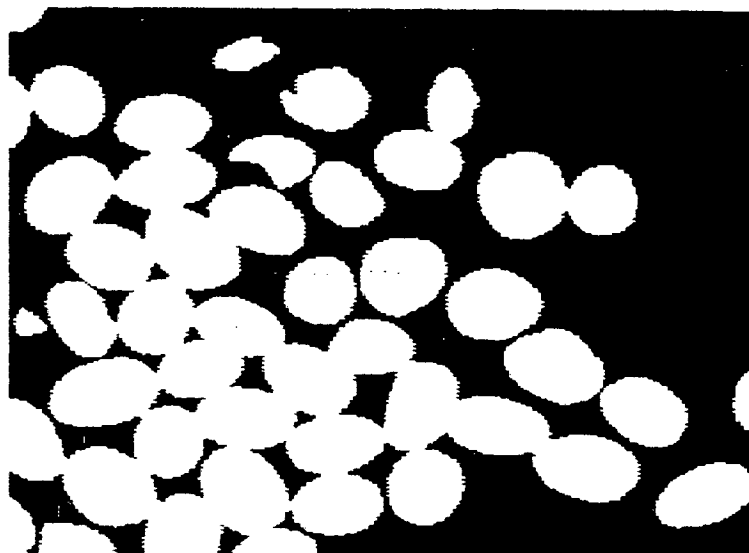
$$N_2(X) = N_2(Sq(X))$$

Remarca: El número de conectividad está dado por $N_2(X) = \# \text{Objetos} - \# \text{Hoyos}$.

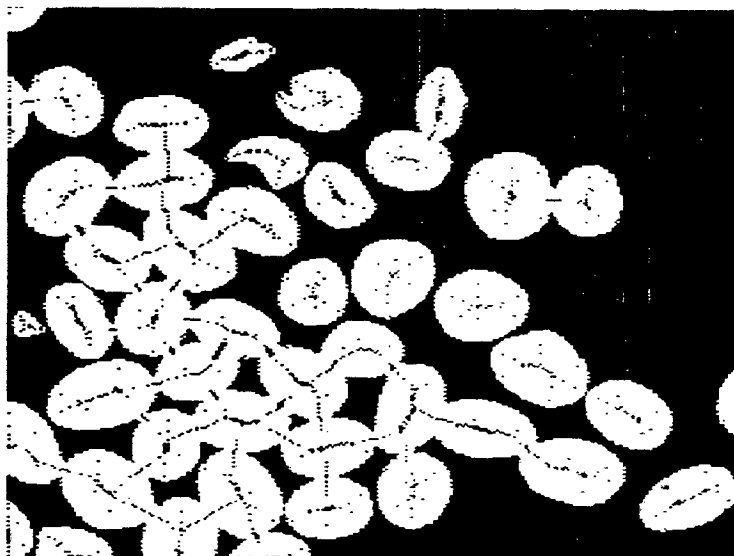
En el caso discreto, esta transformación no responde a las propiedades topológicas del esqueleto definido en el caso Euclideo: Homotopía, Número de conectividad y el espesor unitario no son respetados. La figura (VII.1) ilustra esta transformación.

Es posible a partir de transformaciones homotópicas condicionales [9] o bajo ciertas técnicas formales [2], conectar dicho esqueleto de manera que conserve la homotopía del conjunto transformado (ver capítulo (VI)).

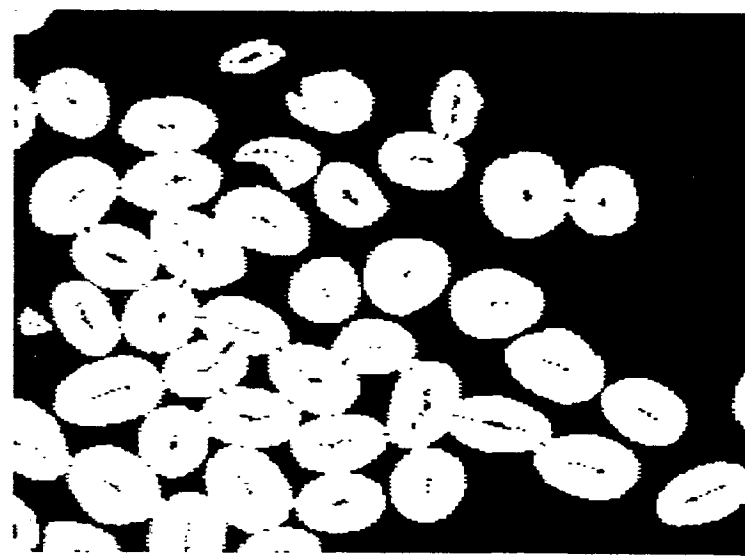
Una transformación derivada del esqueleto por bolas máximas es la llamada Bisectriz Condicional, propuesta por F. Meyer. Sin entrar en detalles (referirse a [1],[7]) para mayor información, esta transformación depende de un parámetro "v", asimilable a la velocidad de avance de un fuego de pradera (técnica utilizada para la obtención de un esqueleto). De un punto de vista más intuitivo, esta transformación tiene tendencia a eliminar las ramificaciones del



(a) Imàgen Original



(b) Esqueleto por Aperturas



(c) Bisectriz Condicional

Figura(VIII. 1) Esqueleto de Bolas Màximas y Bisectriz Condicional.

esqueleto originadas por la perturbaciones en los contornos del objeto, así como el tipo de trama utilizado. Un estudio más a profundidad de esta transformación podría darnos información sobre la forma real del objeto en tramas digitales. En la referencia [4] se muestran algunos resultados que podrían ser utilizados para realmente introducir un concepto de forma en la M.M. Su definición algorítmica está dada por:

$$Sq(X) = \bigcup_{\lambda > 0} \{ \varepsilon_{\lambda B}(X) / \delta_{(v-1)B}(\gamma_B(\varepsilon_{\lambda B}(X))) \}$$

Un estudio frecuencial está como planes de investigación sobre estas dos transformaciones, así como un estudio de forma.

VIII.- MARCADORES Y LINEA DE SEPARACION DE AGUAS (WATERSHED). EL PRINCIPIO DE SEGMENTACION DE IMAGENES Y CAMBIO DE HOMOTOPIA. (PARADIGMA DE BEUCHER [6],[13]).

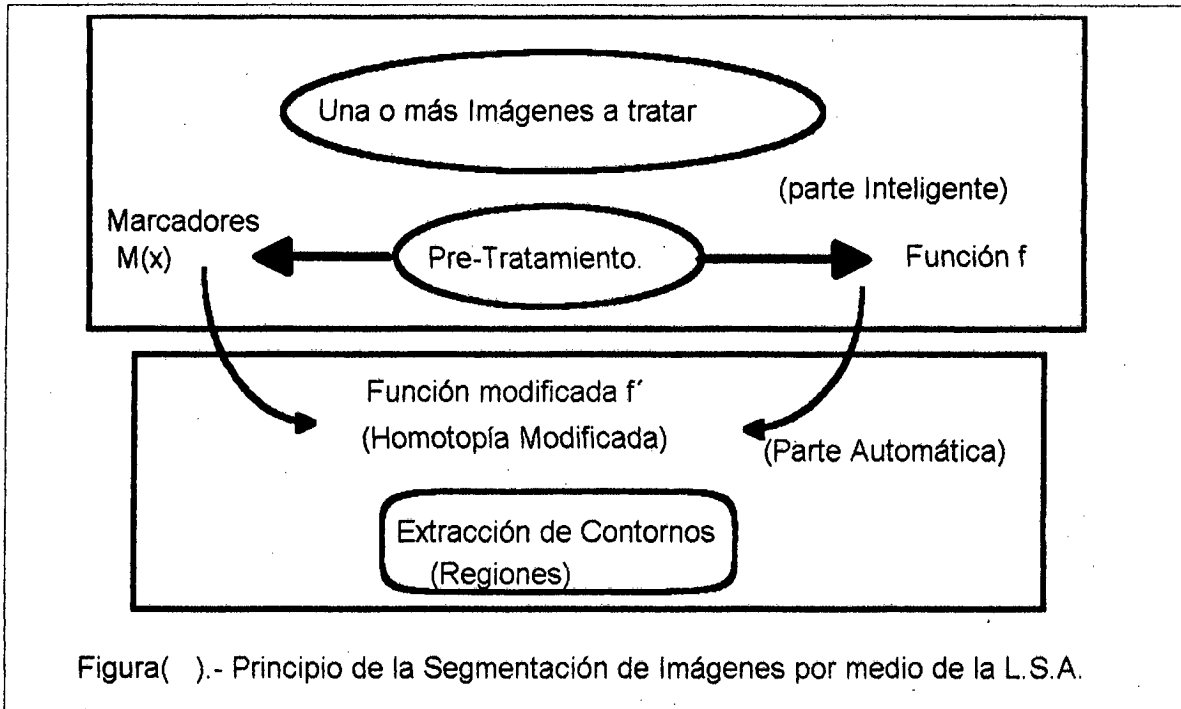
En los capítulos anteriores dimos una introducción completa sobre diferentes transformaciones morfológicas. De todas las transformaciones mencionadas, nos interezaremos particularmente en aquellas que utilizan para su aplicación criterios de conectividad. Aunque se dió de manera amplia la presentación de herramientas para el filtrado y tratamiento de imágenes, no se habló sobre dos conceptos bien ligados y que forman una herramienta morfológica muy importante en la segmentación de imágenes en la M.M. y los cuales hacen uso de cambios de conectividad a partir de marcadores e igualmente de otra herramienta morfológica llamada Línea de Separación de Aguas o Vertientes (watershed en ingles) [12]. Estas dos nociones juegan un papel primordial cuando se utiliza la técnica de segmentación de imágenes. Vamos a describir lo más simple posible estas dos nociones y describiremos más tarde un algoritmo bastante eficiente para su implementación y aplicación.

El Marcaje Morfológico y El Cambio de Homotopía de las Funciones.

Cuando las imágenes a tratar tienen una fuerte complejidad (forma, ruido, contraste malo, ...), el problema de segmentación de imágenes puede devenir una técnica muy pesada para su aplicación e implementación. En efecto, si se detremina un gradiente (por ejemplo), sobre una imagen con estas características (con el fin de poner en evidencia los contornos de las regiones a separar), se tendrá seguramente una sobre-segmentación (regiones cortadas), o una sub-segmentación (fusión de dos o más regiones). Frente a estos problemas se podrán realizar las siguientes etapas (según Vincent & Beucher);

- (a).- Eliminar los segmentos no significativos del gradiente o de la L.S.A. Separar las regiones ligadas.

(b).- Encontrar un buen conjunto de marcadores de las regiones a separar.



Figura().- Principio de la Segmentación de Imágenes por medio de la L.S.A.

La segunda opción pareciera más interesante. El problema que se presenta evidentemente y que en general no es trivial, es el de poder por medio de transformaciones morfológicas, encontrar este conjunto de marcadores. En efecto, bajo esta perspectiva, segmentar una imagen consiste a poner en evidencia un conjunto de marcadores M que designan los objetos o regiones a extraer dentro de una imagen et una función "f" cuantificando las transiciones entre estos diferentes objetos. La función "f" es entonces modificada por reconstrucción geodésica, con el fin de producir una nueva función teniendo como mínimos el conjunto "M". Después, la aplicación de la L.S.A. es directa. La figura (VIII.1) resume lo anteriormente dicho, mientras que enseguida clarificamos este procedimiento.

Hablar de la forma de encontrar estos marcadores sale fuera del contexto de este curso (puesto que la selección depende de cada tipo de imágenes). Haremos entonces la hipótesis que se tiene un buen conjunto de marcadores dado por una imagen $m(x)$ (valor "0" si no existe el marcador y "1" en el caso contrario). Se construirá una imagen numérica de la manera siguiente:

$$M(x) = \begin{cases} N \max (255 \text{ por ejemplo}) & \text{si } m(x)=0 \\ 0 & \text{si } m(x)=1 \end{cases}$$

En la figura (VIII.2) mostramos la imagen inicial $f(x)$ (la cual puede ser una imagen gradiente, una imagen Gradiente, una imagen TOP-HAT, ...). Construiremos a partir de esta función y de $m(x)$ una nueva función que llamaremos $f'(x)$ dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } m(x)=0 \\ 0 & \text{si } m(x)=1 \end{cases}$$

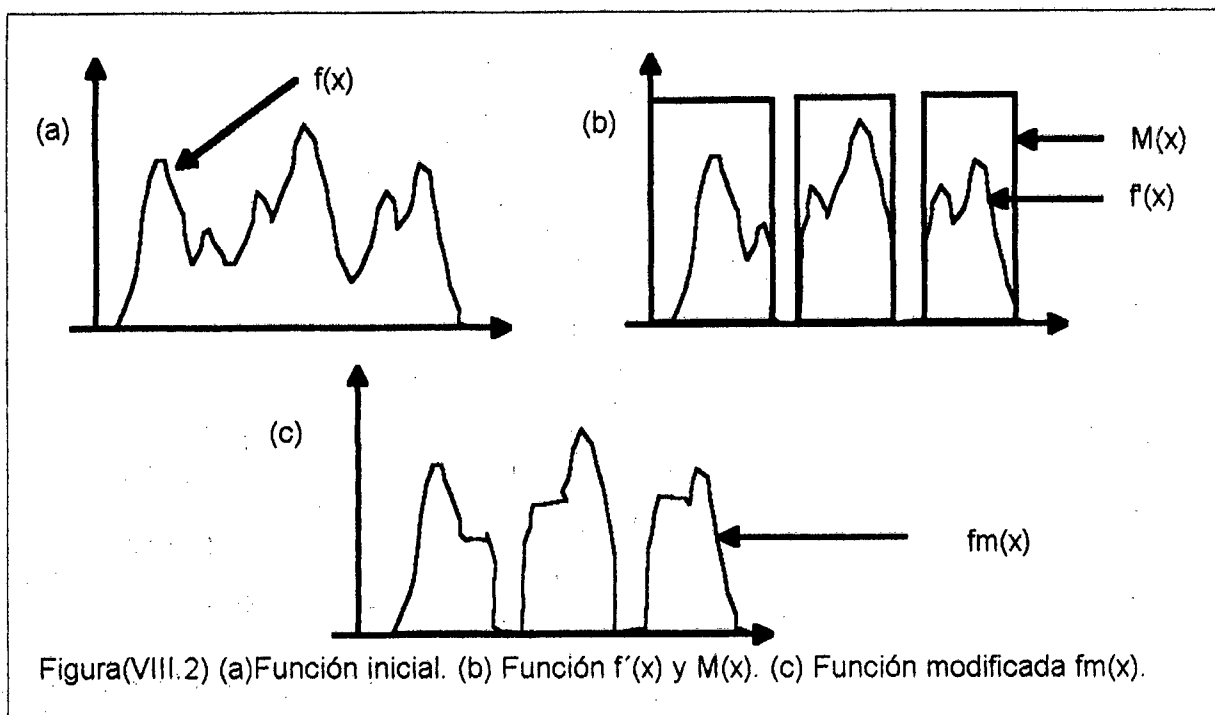
En la figura(VIII.2) mostramos las imágenes (funciones) $f'(x)$ y $M(x)$. Enseguida se realiza una secuencia de transformaciones para imponer los mínimos de $M(x)$ a $f(x)$;

$$\varepsilon_p^1(M) = \text{Sup}\{M \oplus B, f'(x)\}$$

donde B es un elemento estructurante isotrópico (disco, cuadrado, hexágono,...). Se realiza esta operación hasta la idempotencia para obtener una nueva función que llamaremos "función modificada $f_m(x)$ ";

$$f_m(x) = \varepsilon_p^\infty(M)$$

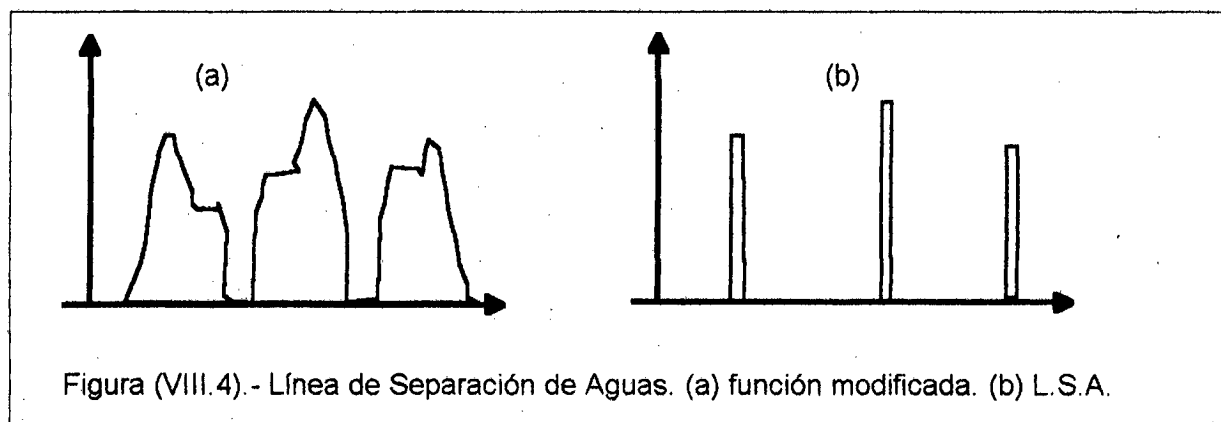
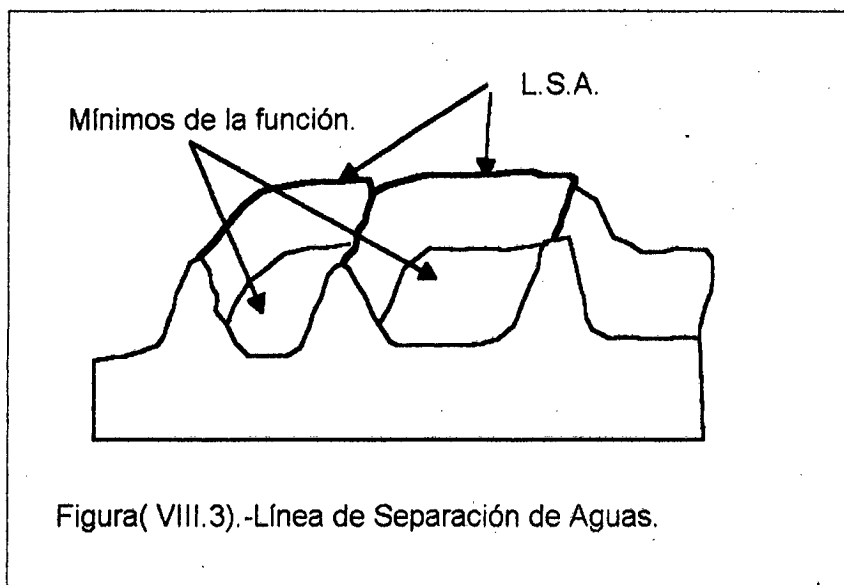
El resultado final se muestra en la figura(VIII.3).



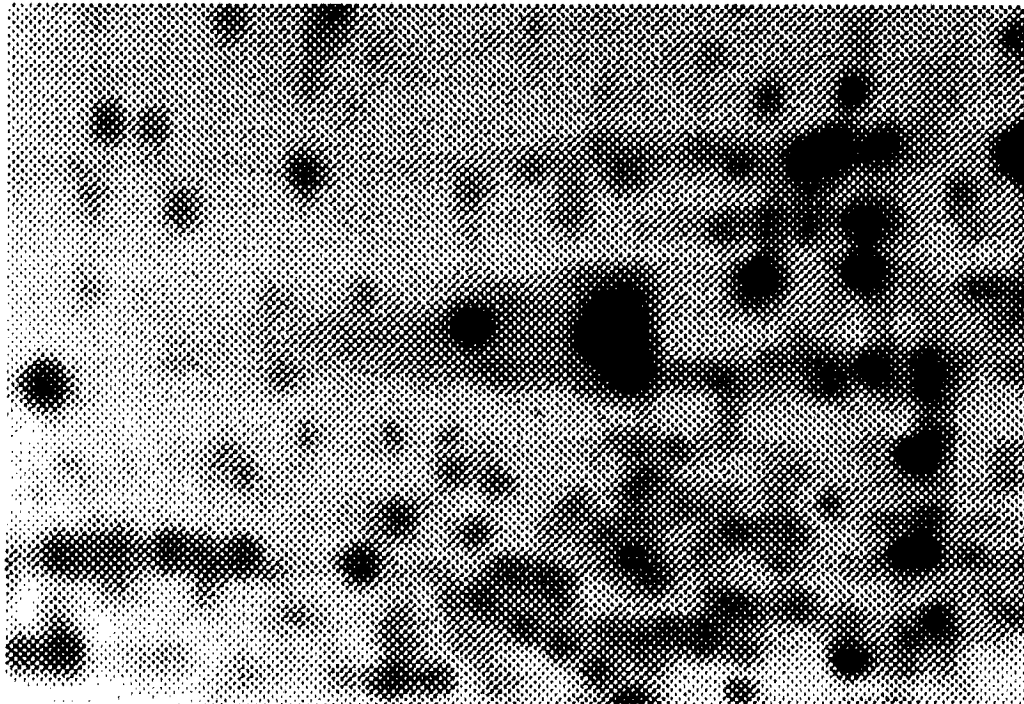
La Línea de Separación de Aguas o Vertientes L.S.A. (Watershed).

La manera más intuitiva de describir la L.S.A. es a partir de una superficie topográfica agujereada en los mínimos (realizado este procedimiento de la manera anteriormente descrita por ejemplo). Enseguida, se realiza un proceso de inundación de las vertientes asociadas a cada mínimo. Este proceso se realiza empezando por los más profundos hasta llegar a la superficie la cual va inundarse progresivamente. Se construye un dique en todo punto donde las aguas provenientes de dos mínimos adjuntos podrían unirse. En la figura (VIII.3) se muestran los diques construidos

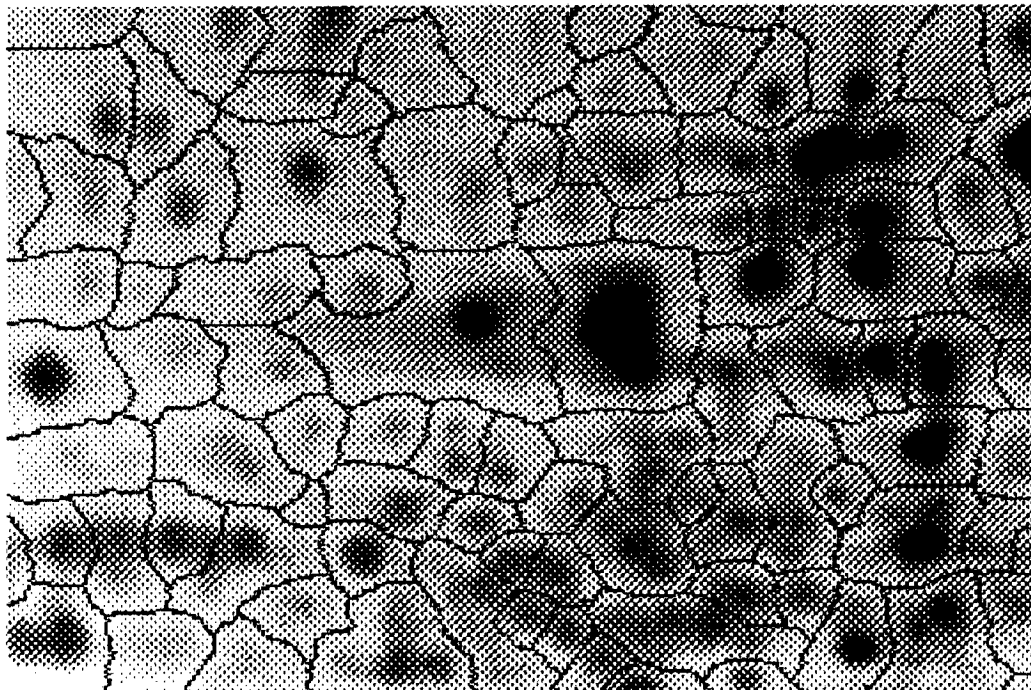
(L.S.A.) así que 3 mínimos vecinos. Finalmente en la figura (VIII.4.a) y (VIII.4.b) se muestran la función modificada y la L.S.A.



Un ejemplo práctico sobre una imagen numérica se muestra en la figura (VIII.5). Mientras que en la figura (VIII.6) se muestra otro caso de aplicación sobre imágenes binarias (aunque la L.S.A. se aplica sobre la función distancia de dicha imagen) para la separación de partículas que se tocan o se traslapan. El watershed se aplico sobre la función distancia modificada por un filtrado del tipo alternado secuencial con el fin de evitar un sobre segmentación. Este último caso es mostrado en la figura (VIII.7).

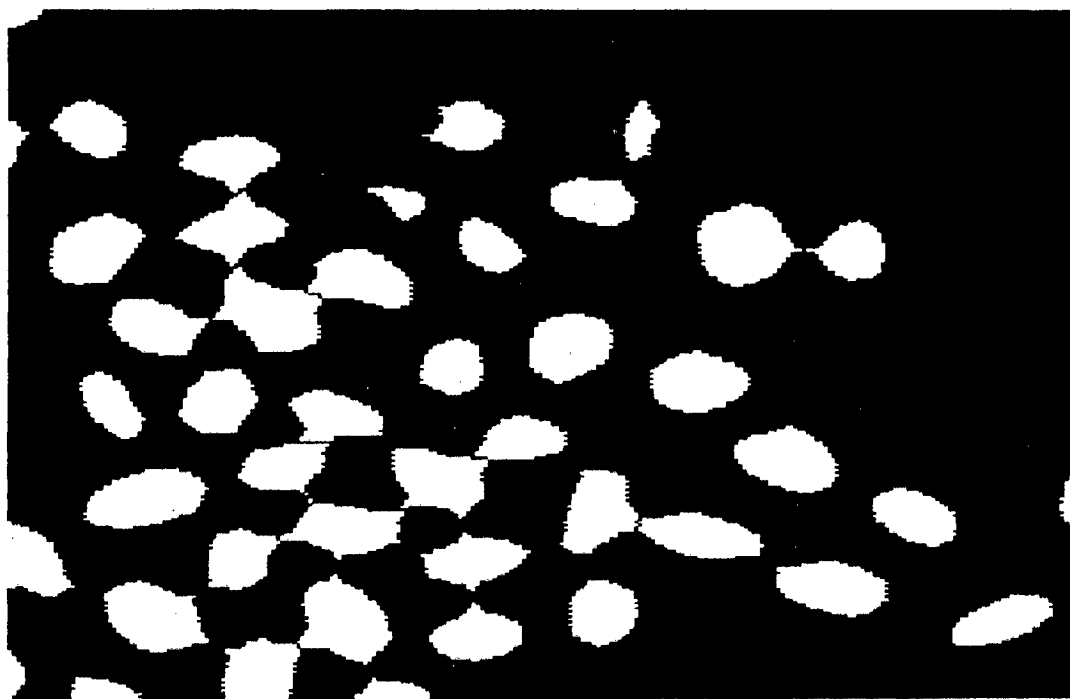


(a) Imágen de un Gel de Electroforésis.

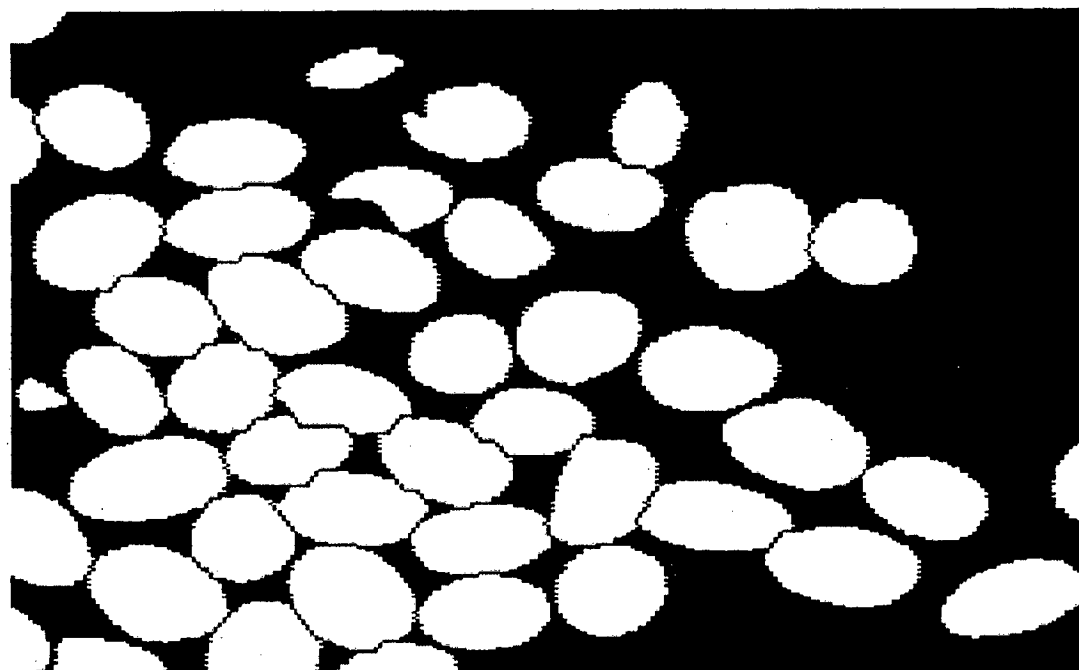


(b) L.S.A. sobre (a) después de un filtrado Morfológico.

Figura(VIII.4). Línea de Separación de Aguas (Vertientes) Watershed.

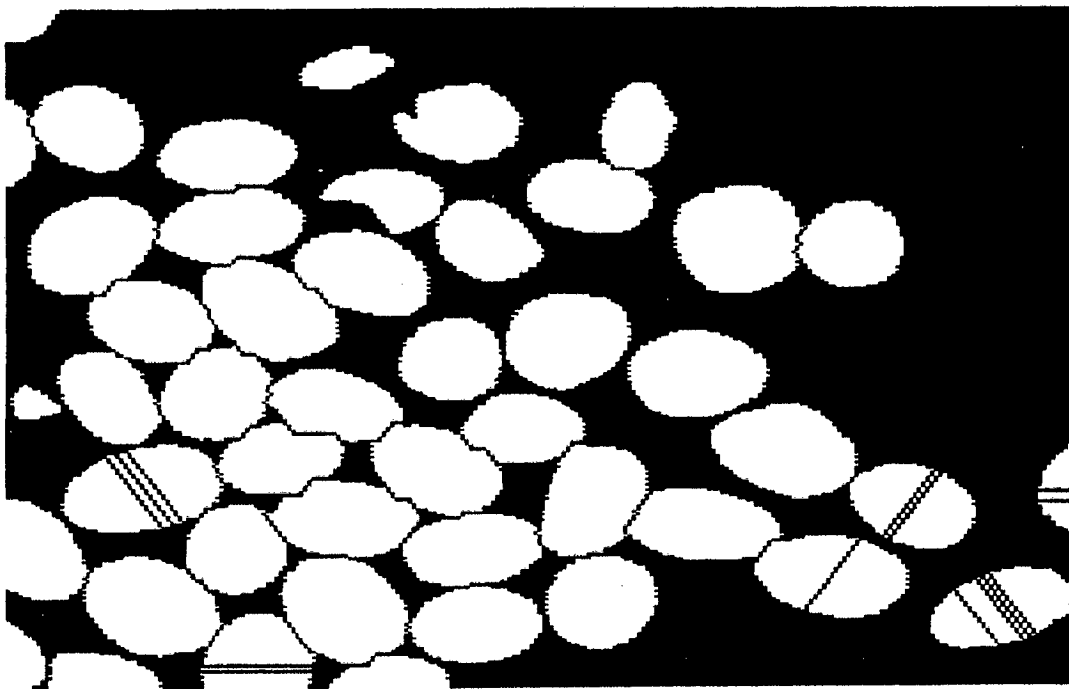


(a).- Separación de Partículas (con filtrado) etapa intermedia.

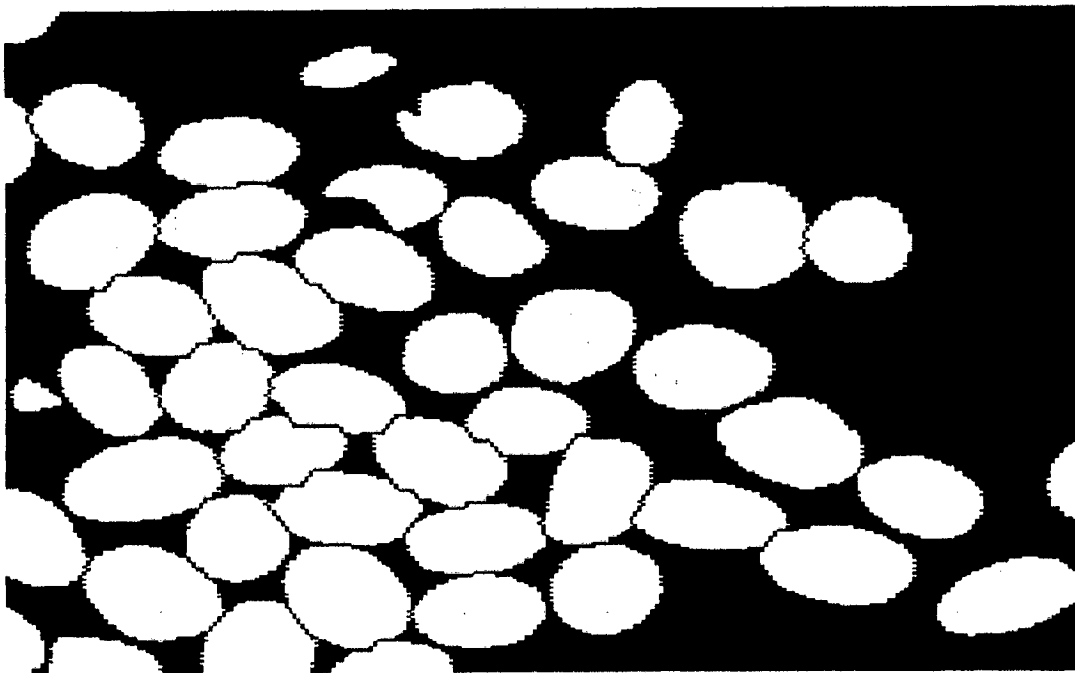


(b).- Separación de Partículas (con filtrado) por medio de la L.S.A.

Figura(VIII.6) Separación de Partículas por medio de la L.S.A.



(a).- Separación de Partículas (sin filtrado) por medio de la L.S.A.



(b).- Separación de Partículas (con filtrado) por medio de la L.S.A.

Figura(VII.5) Separación de Partículas por medio de la L.S.A.

IX.- HACIA UN CONJUNTO DE TRANSFORMACIONES MAS ELABORADAS.

El objetivo de este capítulo es el de presentar un conjunto más amplio de transformaciones morfológicas y a su vez más elaboradas en su implementación. La presentación no se desarrolla en una línea dada, sino en diferentes direcciones con el fin de dar un panorama más amplio de lo que es la morfología matemática.

Ultimos Erosionados.

Una segunda definición del ultimo erosionado (ver def. III.4.1), toma en cuenta la eliminación, durante el estudio de la evolución de las erosiones, de las componentes conectadas que desaparecen en el curso de erosiones sucesivas. Las llamaremos Ultimos erosionados y se definirán por;

Definición IX.1.- Sea un conjunto X. Los Ultimos Erosionados aparecen en el curso de una sucesión de erosiones de X de tamaño λ (λB) y constituyen la unión de componentes conectadas $Y_\lambda(X)$ que desaparecen cuando se realiza una operación de tamaño $\lambda+1$. Sea Y_λ el erosionado de tamaño λB y $Y_{\lambda+1}$ el erosionado de tamaño $\lambda+1$

$$Y_\lambda = \varepsilon_{\lambda B}(X) \quad ; \quad Y_{\lambda+1} = \varepsilon_{(\lambda+1)B}(X)$$

Los ultimos erosionados de la etapa λ pueden ser obtenidos por diferencia conjuntista entre Y_i y Y_{i+1} , donde Y_i es el conjunto que proviene de la reconstrucción de Y_{i+1} como marcador. La unión sobre λ permite encontrar los últimos erosionados de X:

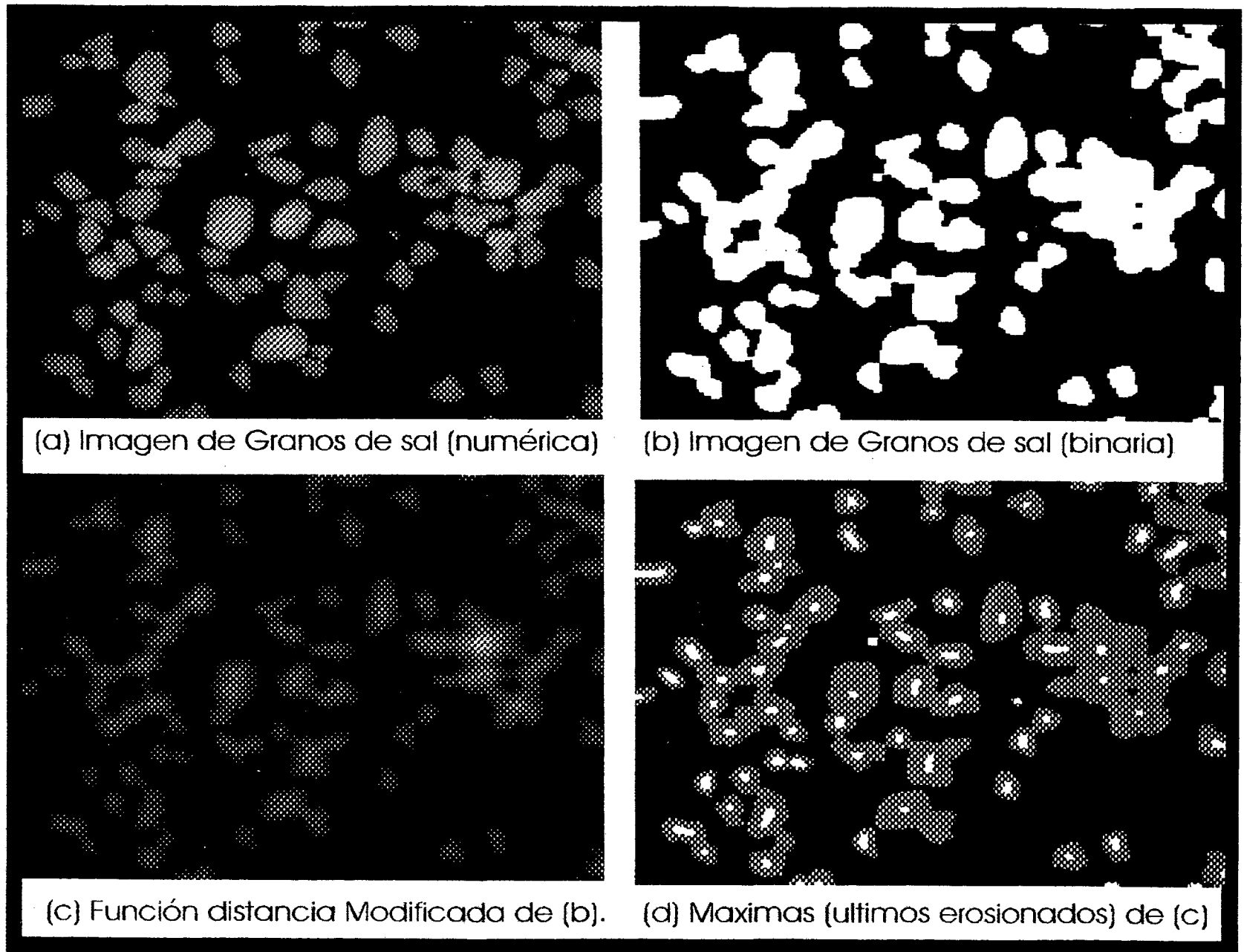
$$U(X) = \bigcup_{\lambda} (Y_\lambda / Y_{\lambda+1})$$

El conjunto $U(X)$ permite encontrar los marcadores de las componentes convexas principales de una imagen. A partir de este conjunto es posible separar las partículas que se recubren o que se tocan (ver figura (IX.1)).

Descomposición y Reconstrucción . Esqueleto de Bolas Máximas.

La definición de esqueleto por bolas máximas fue dado anteriormente así como un conjunto de propiedades topológicas en el caso binario (conjuntos). La misma definición puede ser utilizada en el caso numérico. Consideremos una imagen numérica " $I(x)$ ". La determinación del esqueleto numérico se hace reemplazando la diferencia ensemblista "/" por la substracción y la unión por la adición. Podemos de esta manera definir, como en el caso binario, un esqueleto numérico no conectado.

El método es el siguiente;



Figura(IX. 1) Extración de Máximas de la función distancia o Últimos Erosionados de (b).

Sea $\{Z_i\}$ una familia de conjuntos binarios definidos por:

$$Z_0 = X \quad ; \quad Z_n = (Z_{n-1} \ominus B) \cup (Z_{n-1} / (Z_{n-1})_B)$$

entonces: $S_q(X) = Z_\infty$

En el caso numérico (imagen "I"):
 $\{Z_i\}$ es una familia de imágenes numéricas

$$Z_0 = I \quad ; \quad Z_n = (Z_{n-1} \ominus B) + (Z_{n-1} - (Z_{n-1})_B)$$

entonces: $S_q(I) = Z_\infty$

Consideremos los residuos del esqueleto en cada etapa del cálculo. Tomamos un elemento estructurante isotrópico (disco, hexágono, cuadrado, ...) de tamaño elemental "1". Estos residuos son de hecho los TOP-HAT de los erosionados sucesivos de la imagen "I". Expresamos "I" en función de estos residuos.

Sea "I" una imagen. Escribimos $\delta\varepsilon$, la apertura de tamaño "1" de esta imagen.

$$I = (I - \delta\varepsilon) + \delta\varepsilon$$

reiterando este procedimiento:

$$I = (I - \delta\varepsilon) + \delta \left[(I - \delta\varepsilon)\varepsilon + \delta \left[(I - \delta\varepsilon)\varepsilon^2 + \delta \left[(I - \delta\varepsilon)\varepsilon^3 + \dots + \delta\varepsilon^n \right] \right] \right]$$

Llamaremos $(I - \delta\varepsilon)\varepsilon^n$ el residuo de "I" de orden "n".

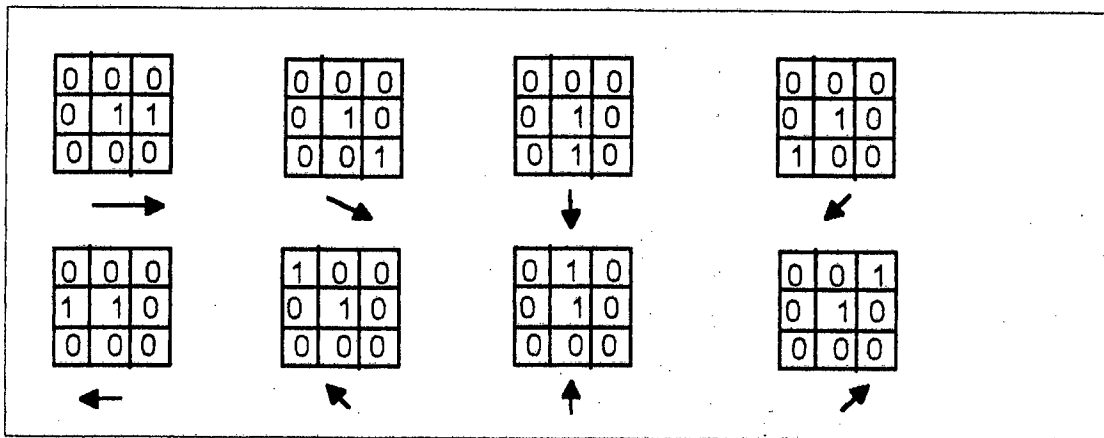
Observaciones:

- 1).- Esta transformación permite extraer en cada etapa los picos de contraste (recordar el TOP-HAT).
- 2).- Esta transformación permite filtrar por algún otro procedimiento (filtrados lineales por ejemplo) adaptado al tamaño de la estructura.
- 3).- Esta transformación permite comprimir la información.

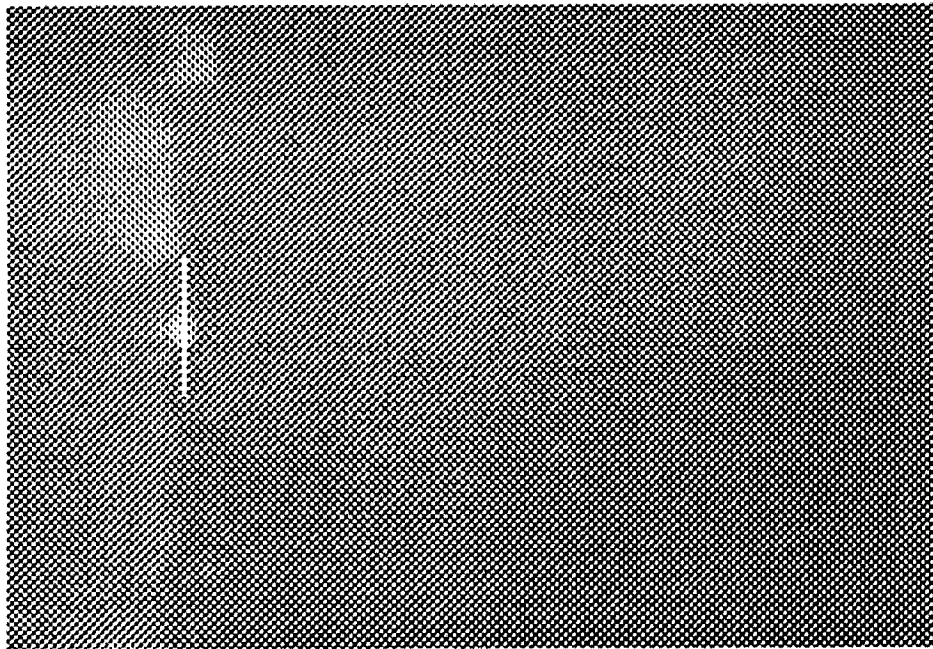
Morfología Direccional.

La Morfología Matemática se ha transformado en una ciencia muy interesante en el Análisis de Imágenes gracias a sus conceptos y a su metodología particularmente adaptada a los problemas de filtrado y segmentación de imágenes. Aquí el estudio y la caracterización de la anisotropía presentan una importancia primordial. En [14] se presenta un estudio completo de métodos que permiten caracterizar la anisotropía de estructuras frecuentemente encontradas en la realidad.

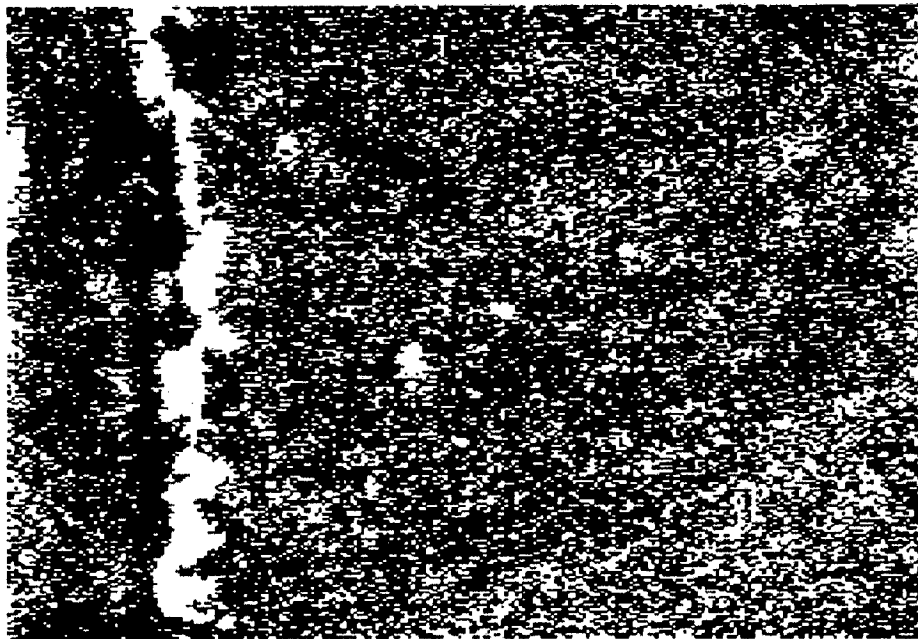
Todas las transformaciones anteriormente descritas son correctas para cualquier tipo de elemento estructurante. Entre toda la gama de estos conjuntos, los siguientes conocidos como lineales conforman una parte interesante



Este tipo de elemento estructurante nos permite extraer características con una orientación bien definida. Que se trate del Gradiente Morfológico, TOPHAT, Cerradura y Apertura Morfológica, ... su aplicación es la misma utilizando el elemento estructurante adecuado. Un ejemplo de aplicación se muestra en la figura (IX.2). El objetivo consistía en la detección de la región semicircular (la detección final se indica sobre la imagen original mediante un segmento de recta). Inicialmente se aplicó un tophat isotrópico con el fin de mejorar el contraste de la imagen y extraer de la mejor manera posible la estructura de interés. Después se aplicó sobre el tophat un filtrado direccional del tipo dado por la configuración (3). El resultado se muestra en la figura (IX.3) donde se observa la eliminación del ruido y dejando solamente las regiones con una fuerte correlación espacial. Una reconstrucción geodésica permite encontrar correctamente la estructura para su marcaje posterior como mostrado en la figura (IX.2).

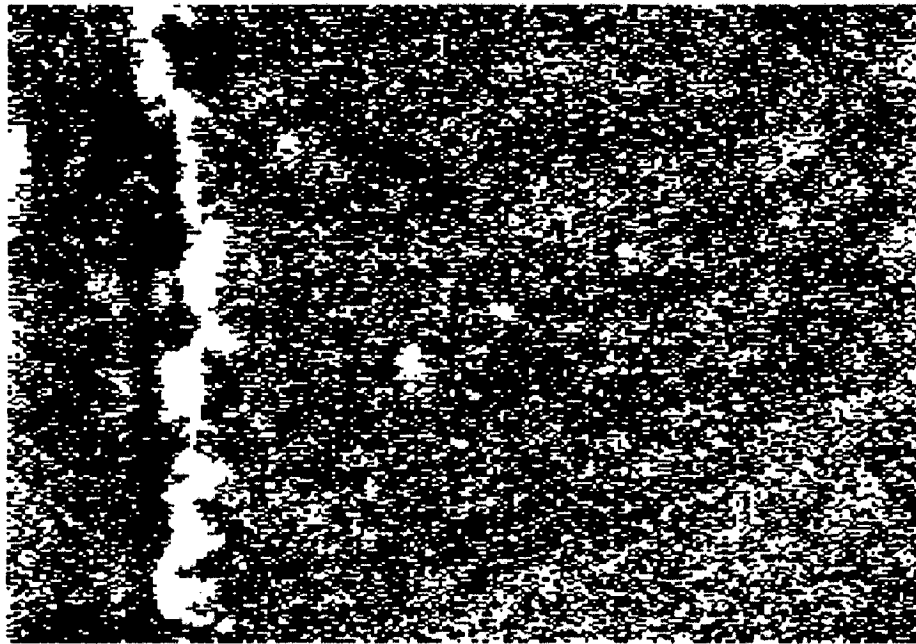


(a) Imagen Original. Detección de Semicírculo.

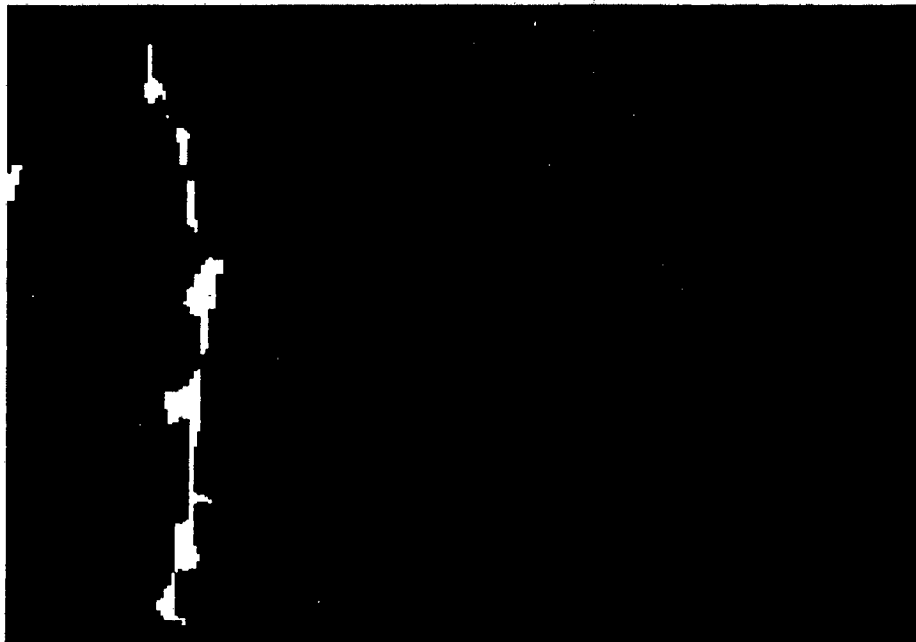


(a) Transformación por TOPHAT

Figura(IX.2).- Transformación por TOPHAT.



(a) Transformación por TOPHAT



(b) Filtrado Lineal (Erosion lineal de Tamaño 16).

Figura(IX.3). Tophat y Filtrado Lineal.

X.- REFERENCIAS.-

- [1].- SERRA J. "IMAGE ANALYSIS AND MATHEMATICAL MORPHOLOGY". VOL. I. (1982) ACADEMIC PRESS.
- [2].- SERRA J. "IMAGE ANALYSIS AND MATHEMATICAL MORPHOLOGY". VOL. II. (1982) ACADEMIC PRESS.
- [3].- TEROL VILLALOBOS I. " DESARROLLO DE UN SOFTWARE DE ANALYSIS DE IMAGENES MEDIANTE TRANSFORMACIONES MORFOLOGICAS". REPORTE INTERNO CIDETEQ. S.C. JULIO 1993 (primera versión), Mayo de 1994 (segunda versión).
- [4].- VINCENT L. "ALGORITHMES MORPHOLOGIQUES A BASE DE FILES D'ATTENTE ET DE LACETS. EXTENSION AU GRAPHES". Tesis de Doctorado en Morfología Matemática. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Mayo 1990.
- [5].- COSTER M., CHERMANT J.L. " PRECIS D'ANALYSE D'IMAGES", Segunda Edición, Presses du CNRS Paris 1989.
- [6].- BEUCHER S. "SEGMENTATION D'IMAGES ET MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE". Tesis de Doctorado en Morfología Matemática. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Junio 1990.
- [7].- MEYER F. "CYTOLOGIE QUANTITATIVE ET MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE". Tesis Doctor Ingeniero, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Mayo 1979.
- [8].- SERRA J, SALEMBIER P. "OPERATEURS CONNEXES ET PYRAMIDES". Reporte Interno N-08-93-MM. Centre de Morphologie Mathématique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Junio 1993.
- [9].- TEROL I. " SPECTRES DE DIAMETRES DES FIBRES DE VERRE DE ISOLATION". Reporte Centre de Morphologie Mathématique. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 1989.
- [10].- GRIMAUD M. " LA GOEDESIE NUMERIQUE EN MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE. APLICACION A LA DETECCION AUTOMATIQUE DE MICROCALCIFICACIONES EN MAMMOGRAPHIE NUMERIQUE". Tesis de Doctor de Morfología Matemática. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Diciembre 1992.
- [11].- LANTUEJOUL C. "ON THE USE OF THE GEODESIC METRIC IN IMAGE ANALYSIS". Journal of Microscopy, Vol. 121, pp. 39-49.
- [12].- MEYER F., BEUCHER S. " Morphological Segmentation". J. of Visual Communication and Image Representation. 1, 1990, 21-46.
- [13]. VACHIER C. " EXTRACTION DES STRUCTURES FIBREUSES EN MAMMOGRAPHIE". N-42-91-MM. Reporte Interno Centre de Morphologie Mathématique. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Septiembre 1991.
- [14].- KURDY M.B. " TRANSFORMATIONS MORPHOLOGIQUES DIRECTIONNELLES ET ADAPTATIVES: APPLICATIONS AUX SCIENCES DES MATERIAUX". Tesis de Doctor en Morfología Matemática. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Septiembre 1990.